This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
33
S22

ELEMENTA GEOMETRIÆ

Methodo naturali clara & facili breviter Demonſttata,

Cum Appendice de *Figurarum Elementarium* Dimenſione per methodum Indiviſibilium.

Item *Logarithmeticâ* & utraque *Trigonometriâ* ad captum tyronum accommodatis.

In Uſum
Studioſæ Juventutis *S. ANDREÆ.*

A GULIELMO SANDERS,
Matheſeos ibidem *Profeſſore* Regio.

GLASGUÆ.
Typis *ROBERTI SANDERS,* Unius è Typographis *Regijs.* *M. DC. LXXXVI.*

Hist. Hispanica
Bowles
9-8-21
24597

Illuſtriſſimo Domino
Ac
Reverendiſſimo in CHRISTO
PATRI
D. ARTHURO,
S. Andreæ Archiepiſcopo
Totius *SCOTIÆ* Primati,

Clariſſimo *Univerſitatis* Cancellario

Et

Regiæ MAJESTATI à Conſilijs.

PRimis Eruditiſſimi *Anteceſſoris* Noſtri laboribus *Sereniſſimo* hujuſce Profeſſionis *Fundatori CAROLO SECUNDO Britanniarum Regi Clementiſſimo* conſecratis: Meæ *Succeſſoris* primitiæ qualeſcunque *Proximo* ſub *MAJESTATE Patrono* jure merito ſe deberi agnoſcunt, *Perſonæ* præſertim *Sacræ*, ad quales antiquitus jubente Deo ejuſmodi ſpectabant donaria; Ac proinde ex officij ſimul & ſuæ inopiæ ſenſu ſe *Tuo* ſolius *Patrocinio* committunt, REVERENDISSIME PRÆSUL, cum ſtrenui *Patroni* clientelam, tum Piam *Patris Almi* Benedictionem

humillime

MVP 3-30-40

humillimè comprecantes in uberiorem *Mathematicæ* proventum per *Regiæ* Donationis, ſummo hìc rei literariæ detrimento aliàs certò perituræ, ſtabilimentum & Proſperitatem. *Reverendiſſimum Dominum* latere nequit, quantum, idque non ſine cauſa, glorietur Collegium *Mariſchallanum* ſe non ſolum, præter quàm Plurimos alios ſuo tempore claros, Noſtrum *Patronum* maximè *Venerandum* habuiſſe Alumnum, alioſque Hujus Eccleſiæ *Patres* adhuc ſuperſtites; Verum etiam omnem quam habet hæc regio *Matheſin* longè latèque diffuſiſſe, cæteriſque hujus Regni Athenæis Profeſſores omnes hucuſque dediſſe: Quod Piæ *Dn. Liddelij* in hunc finem *Donationi* tribuendum; Nec non haud minus Piæ curæ fidelique culturæ *Inclyti ABREDONIÆ Senatus*, qui eam, inter alìas ejuſmodi non paucas notabiliter adminiſtratas, per ſeptuaginta nunc retro annos ſartam tectam conſervavit & triplò fere auxit, in perpetuum *Illius Civitatis* emolumentum ac decus; Aliarum verò dedecus execrandum, ubi ſecus imo contrarium fuerit. *Opuſculum* hoc in uſum *Juventutis* S. *ANDREÆ* pridem conſcriptum, & efflagitantibus hujus loci Amicis, alijſque alibi ſagaciſſimis Mathematum Alumnis, publici juris nunc factum *Veſtro Nominis Venerandi Auſpicio*, gratum fore exoptans, omni humilitate animi jam denuo Dicat Conſecratque.

VESTRI Nominis Sacerrimi
Obervantiſſimus

GULIELMUS SANDERS.

Lectori BENEVOLO.

ELementorum ſyſtema primus conſcripſit Euclides, in quo licet per bis mille annos nuſquam deprehenſus ſit paralogiſmus; varia tamen ſcias amice Lector adverſus illud deferri, quorum nonnulla hujus præſertim ſæculi tyrones, in quorum uſum efflagitantibus amicis, hicce libellus in apricum prorepſit, plurimùm morari ſolent. Scil. Axiomatum ſimul & definitionum nimia congeries. In harum quibuſdam moleſta valde ſaltem voce tenus aſperitas; in alijs latens veritas non ſatis perſpicua. Enunciata quædam in axiomatum album gratìs admiſſa: dum alia per ſe nota ſuſcipiuntur probanda. Propoſitionum quàm plurimarum in Lib. Præcipuè 2, 5. 11. & 12. Demonſtrationes admodum perplexæ atque prolixæ. Redundans aliarum numerus nullius fere uſus, præterquam in paucis ſequentium ſtabiliendis, dum his ſemel aliunde probatis, aliæ apprimè neceſſariæ deſiderari videntur. Tandem librorum ac propoſitionum ordo occultus atque promiſcuus. Quæ obſtacula nè apud nos in ſtudij Mathematici moram deinceps valeant, quantùm poſſumus, ita removentur.

Sepultis definitionibus ſuperfluis & axiomatis, reliquarum ſubobſcuræ in Theoremata vertuntur, qualia ſunt Ax. 10. 13. 14. Lib. 1. Eucl. Cum def. 10. & 20. Lib. 5. & 5. 6ti. Compoſitionem Rationum ſupponentibus. E contrario, Propoſitiones quædam ac ſua media æquè claræ ad axiomata & poſtulata reducuntur, ut 2 & 3 Lib. 1. cum 1. 4ti, haud difficiliores ipſis poſtulatis ibidem traditis: 7. 8. 9. & 10. Ejuſdem; primo quippe Lib. 1. Axiomate, ut particularia ſuo univerſali, comprehenſæ; vel ex naturali Rationis notione

à nobis

à nobis uſurpatà evidentes. Quædam item propoſitiones reſcinduntur tanquam inutiles, principalioribus ad quas unicè deſtinabantur, aliter & faciliùs quàm earum ope demonſtratis: ut 7 Lib. 1, 23. Lib. 3, ſex primæ, 13. 20. *&* 21. Lib. 5, 27. 28. 29. Lib. 6, 22. 23. 26. 35. 39. Lib. 11, 3. 4. 16. 17. Lib. 12. *Reliquarum complures verbis felicioribus traditæ hìc breviùs & clariùs quàm alibi, quantùm ſcio, demonſtrantur; in* Libro. 2. *ſpeciatim, abſque faſtidioſis figurarum conſtructionibus, ſolo ductu per modum Multiplicationis facto:* Et Libro. 5. *nobis Primo (torvis præterea* Def. 12. 14. 16. 17. 18. 19. *ſublatis, ob voces propoſitionum eò ſpectantium mutatis) mediante genuina Rationis notione* à Tacqueto *mutuata &* 19na Lib 7. Eucl. *De proportionalibus in quovis genere quanti probata: Unde hic liber uterque tyronibus hucuſque ſummè arduus omnium facillimus evaſit.*

Quod ad hujus libelli methodum: Liber. 5. Eucl. *in eo ponitur primus, tum ordine naturæ, cum de quanto in genere agat; tum diſciplinæ, cum quædam de circulo theoremata proportionum adjumentò multò faciliùs quàm aliter probantur. Hunc ſequuntur* Primi *propoſitiones de lineis rectis & angulis, cum* Secundo; *Dein reliquum* Primi *cum* Sexto, Tertius *cum* Quarto, Undecimus *tandem &* Duodecimus *in reliquos quatuor libros digeſti, quibus complexa ſolidarum doctrina cæteris Elementis perſpicuitate ullatenus vix cedere videtur. Horum octo librorum unuſquiſque ſuo titulô notatur in alios ſpecialiores ſubdiviſus, ut methodus diſcenti appareat. Problemata à Theorematis Naturaliter ſequuntur, idque ut plurimùm abſque ratiocinio. Propoſitionibus* Euclidis *aliæ perquam neceſſariæ commiſcentur, ut in* Lib. 1. *in gratiam* Arithmeticæ Practicæ *&* Analyticæ *potiſſimùm, unde Elementorum fiat ſyſtema plenius, quod nihilominus ad aliorum molem minimè excreſcat. Singulæ propoſitiones ſuis notantur Autoribus: partim ut jus ſuum cuique tribuatur, partim ut hic libellus ſimul cum tabula adjecta ipſius* Euclidis *vicem in quocunque negotio Mathematico tibi ſuppleat: quarum præterea non paucæ aſteriſmô notantur, quas pro una vice aut pluribus tyrones tranſeant, donec reliquas magè neceſſarias earumque uſum in praxibus ſaltem Geometricis accuratè ca-*

piant. Appendix *denique ſubjungitur, quorſum? ipſe titulus indicat* : Tractatus *etiam de* Logarithmis *cum utraque* Trigonometria *proximè perdiſcendus, quò ſimul & Elementis cum Arithmetica Vulgari, quæ paſſim habetur, probè intellectis, quod brevì poteris, altiora Mathematum ſcandere valebis.*

Cæteri non tanguntnr Euclidis *Libri*; *Nam* 7. 8. *&* 9. *Elementa Geometrica non ſunt, ſed ſpeculationes de numeris, unde Arithmetica practica non dependet, verum à paucis quibuſdam proportionum theorematis in hujus libro primo traditis, ut in tranſitu videbis.* Decimi *locò ſufficiunt quæ de* Commenſurabilibus *&* Incommenſurabilibus *in genere & de lineis incommenſurabilibus quibuſdam ad fines horum Lib.* 1 *&* 3 *habentur.* Libri *deinque* 13. 14. *&* 15. *ſunt niſi quinque corporum regularium contemplationes parùm utiles in gratiam Philoſophiæ Platonicæ, quam profitebatur* Euclides, *excogitatæ. His utere & Vale.*

G. S.

Primum Cor. 10. 13. *Eucl.* ſcil. Diameter biſecans arcum biſecat etiam cordam, *Omiſimus in* Lib. 4. *Ejus probationem vide in demonſtr.* 5. *Theor. Trigon. Plan.*

Principiorum,

Principiorum Genera apud Geometras ſunt hæc.

D*Efinitio* eſt explicatio vocabuli artis.
Axioma eſt ſententia per ſe clara.
Poſtulatum eſt quô petitur aliquid facillimum fieri, quod recuſari nequit.
Theorema eſt quod proponit aliquid demonſtrandum.
Problema eſt quod proponit aliquid efficiendum
Corollarium eſt quod è facta demonſtratione colligitur tanquam aliquod lucrum.
Lemma eſt aliqua præmiſſa demonſtrata, ut demonſtratio quæſiti evadat brevior.
Scholium eſt alicujus principij ſupplementum, aut ſaltem doctrina aliqua ad idem ſpectans ulteriùs explicata.

Vocum contractiones in hoc libro, ut pgr. pro Parallelogrammum, *ppd. pro* Parallelipipedum. *rectg. pro* Rectangulum, &c. *Sunt obviæ: Characteres generales explicantur in proprijs locis.*

ERRATA ſic Corrigantur.

Pag. 13. *lin.* 28. *lege* AD^2. *P.* 14. l. 14. $\frac{A}{B}$ *P.* 26. l. 13. A+B. *In hoc theor.* 32 & *dem. ubique dele, primam vel, tertiam vel,* A vel, C vel. *P.* 40. l. 4. *vid.* 2. cor. 1. d. 4. l. 12. *ax.* 1. *P.* 50. l. 7. *per* 15. l. 23. *dele* = zE. *P.* 51. l. 7. = $\frac{1}{2}$ Zq. l. 11. 2Eq. *P.* 56. l. 22. *leg.* 6. 2. *P.* 58. l. 3. BDC > *P* 62. l. 19. CF. l. 24. DF. l. 26. CG cum. *P.* 63. l. 28. baſi DC biſectâ in E, & duc CG ∥ EF. *P.* 65. l. 27. *per* 1. *part. huj.* *P.* 68. l. *ult.* & YD. *P.* 69. l. 24. *ſupple* 3c l. *penult.* ZA^2. *P.* 72. l. 30. OF. OI. *P.* 73. l. 11. *dele* BH=OF &. *P.* 78. l. 8. Fig. 35. *P.* 98. l. 14. GB<. *l.* 19. duc AC. *P.* 101. l. 1. >. *P.* 108. l. 19. $\frac{1}{2}$ LP. l. 24 & 26. 3. *P.* 114. l. 14. *leg.* 11. 4. *P.* 118. l. 10. vid. fig. 5. *P.* 119. l. 19. RAO. *P.* 120. l. 4. BDG &. *P.* 121. l. 18 DF. *P.* 122. l. 19. vid. fig. 12. *P.* 124. l. 14. *leg.* 1. d. 6. *P.* 125. l. 4. DB, in. *P.* 144. l. 17. fig. 9. *P.* 145. l. 5. *leg. cor.* 15. 4. *Item,* × d—2a. *P.* 146. l. 7. $\frac{1}{3}$d)

In Tractatu. *P.* 8. l. 14. *leg.* 150. *Ubique lege, ſinubus.* *P.* 10. l. 10. $\frac{1}{2}$ CF. *l.* 18. AD. l. 26. AGq. *P.* 11. l. 12. =SP. *P.* 12. l. 2. dat. 2. *P.* 14. l. 2. coſinus. *P.* 15. l. 15. duplicato aufer. *P.* 21. l. 5. EB. *P.* 22. l. 29. DB. l. 30. AB & *comp.* BAD. *P.* 23. l. 20. *ſupple*, niſi trianguli reſolutio ad 7 vel 9 theor. ſpectet. *P.* 24. l. 22. *dele* AE. *P.* 25. l. 31. ED. *P.* 30. l. 2. *leg.* 108 l. 27. dein. *P.* 31. l. 29. *ſupple* & GY ſinus dimidij.

ELEMENTORUM GEOMETRICORUM

Liber Primus.

DE

QUANTO in Genere.

Definitiones.

1. MAgnitudo ſeu Quantum dicitur id quo majus & minus dari poteſt in eodem genere. Ejuſque relatio ad ſuam menſuram menſurantem aut quaſi menſuram, vocatur Quantitas, abſtracte ſcil. ſumpta; plerumque tamen apud Geometras voces Magnitudo & Quantitas pro ipſis quantis concrete uſurpantur.

2. Unitas dicitur quantitas quædam nota & familiaris (cujuſcunque ſit generis) ad quam reſpectu habito, valores aliarum quantitatum quæ ſpectantur ut incognitæ, æſtimamus: & multitudinem hujuſmodi unitatum vocamus Numerum; ſicut unitatis partem vocamus fractionem: Omnemque numerum dicimus verum, quem unitas, hujuſve pars aliquota (2da, 3tia vel 4ta &c.) aliquoties repetita componit: qualis eſt omnis qui notis tantum vulgaribus, 0. 1. 2. 3. &c. abſque præfixo ſigno conſcribi ſolet.

 Not

Not. Euclidem Numeri vocabulum quandoque late ſumere pro omni eo quo quantitas cujuſvis rei exprimitur, ut in 16. 17. 18. 19. def. lib. 7. Quandoque vero ad unitatum multitudinem reſtringere, ut in definitionibus iſtas ibidem præcedentibus.

3. Magnitudo magnitudinem continere dicitur, cum iſta hanc in ſe continet vel æqualem.

4. Magnitudo magnitudinis, minor majoris & ejuſdem generis, vocatur Pars. Major vero minoris dicitur Totum.

5. Si pars ſuum totum metiatur, ſeu aliquoties ſumpta id adæquet, dicitur ejus pars aliquota vel menſura, item Simplex vel Submultiplex: ſicut ipſum totum reſpectu ejuſmodi partis dicitur Multiplex. Si vero pars utcunque repetita ſuum totum non adæquet, vocatur Aliquanta. *Sic 3 eſt pars aliquota numeri 12, ſed aliquanta numeri 7.*

6. Similes partes ſunt quæ eodem modo ſeu æque in ſuis totis continentur; ut qualis pars ſui totius eſt una, talis pars ſui ſit altera. *Quod ſane nihil aliud eſt, quam partes ſimiles ad ſua tota eandem rationem habere.*

7. Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis mutua quædam habitudo: Eaque vel ſecundum earum differentiam quâ una alteram excedit, diciturque Ratio Arithmetica; *ut quâ v. g. 6. excedit 2. & notatur ſic, 6 — 2.* Vel ſecundum modum quo una alteram continet aut in ea continetur, & dicitur Geometrica; *ut quâ 6 continet 2.* Prior cujuſvis rationis terminus vocatur Antecedens, poſterior autem conſequens.

Not. *Per Rationem ut & Proportionem ſimpliciter, ſemper intelliguntur Geometricæ.*

8. Proportio eſt rationum identitas aut æqualitas. *Cum igitur in tribus tantum terminis diſtinctis habetur aliqua proportio, medius æquivalet duobus.*

9. Duæ rationes dicuntur æquales ſeu eædem, cum utriuſque antecedens æque (nec magis nec minus) continet ſuum conſequentem, vel in eo continetur. Duæ vero rationes ſunt inæquales, ſeu una alterâ major, quando antecedens unius rationis magis continet ſuum conſequentem

tem, vel minus in eo continetur, quam antecedens alterius continet ſuum, vel in eo continetur.

Sic ratio quam habet 6 ad 2, æqualis eſt rationi quam habet 3 ad 1. Major vero ratione quam habet 8 ad 4. Et minor ratione quam habet 10. ad 2.

Not. *Cum de magnitudinibus in genere ſermo hic fiat, eas per literas alphabeticas in poſterum repræſentari expedit. Ita ratio v. g. magnitudinis A ad B, ſic notatur, A : B, vel* $\frac{A}{B}$.

10. Magnitudines quæ rationes habent æquales, vocantur Proportionales. Horum ſi medij bis ſumantur (ita ut ſint conſequentes reſpectu præcedentis, & antecedentes reſpectu ſequentis) dicuntur continue proportionales; ſi autem nullus terminus bis ſumatur, vocantur diſcretim proportionales, vel ſimpliciter Proportionales.

Continue proportionales ſic notantur $\div$ A. B. C. D, & ſic *efferuntur, eſt A ad B, ut B ad C, & B ad C, ut C ad D. diſcretim proportionales ſic notantur, A: B : : C : D, vel A : B* = *C* : D, *vel* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. *Et ſic leguntur, Eſt A ad B, ut* C *ad D, vel ratio inter A & B æqualis eſt rationi inter* C *&* D.

11. Magnitudines dicuntur Homologæ, Antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes vero conſequentibus. *ut ſupra*, A & C, B & D.

12. Magnitudines dicuntur addi, cum in unam colliguntur ſummam ſeu aggregatum.

13. Magnitudo a magnitudine dicitur ſubſtrahi, cum ab ea auferrur.

Summa ex A & B, ſic notatur A + B, & curte ſic legi ſolet, A *plus* B. *ſed reſiduum, cum* B *ſubſtrahitur ex* A, *ſic* A — B, *legiturque* A *minus* B, *vel exceſſus magnitudinis* A *ſupra* B. *ſic* 5 — 3, *i. e.* 2 : 0 — 2 *ſeu* — 2, *i. e. duo infra nihil.*

14. Magnitudo B magnitudinem C multiplicare dicitur, cum talis invenitur magnitudo H, ita ut ſit unitas, quæ dicatur A, ad multiplicantem B, ut multiplicanda C ad productam H vel B C

Productum v. g. ex C multiplicato per B ſic notatur BC, quod tamen per ſimplicem literam etiam repræſentari poteſt.

COR. Patet, quod integrum unitate majus magnitudinem multiplicans, eam auget, fractio vero minuit, in ratione multiplicantis ad unitatem.

Sic multiplicando 12 *per* 3, *producitur* 36; *&* *multiplicando* 12 *per* $\frac{1}{3}$, *producitur* 4. *Nam eſt* 1 : 3 :: 12 : 36. *&* 1 : $\frac{1}{3}$ :: 12 : 4.

15 Si productum fiat ex magnitudine A aliquoties poſita & ſic in ſeipſam multiplicata continue, vocatur poteſtas 2da, 3tia, 4ta, &c. (vel quadratum, cubus, quadrato quadratum &c.) pro numero dimenſionum ſeu magnitudinum æqualium quibus conſtat; & ipſa A magnitudo vocatur radix quadrata ſeu 2dana poteſtatis 2dæ, cubica ſeu 3tiana poteſtatis 3tiæ, & ſic deinceps.

Sic poſitâ A *pro radice,* A A *eſt 2da poteſtas*, A A A *3tia, &c. brevius ſic notantur* A. A^2. A^3. A^4. (*exponentibus* 1. 2. 3. 4. *numerum dimenſionum indicantibus*) *vel* A. Aq. Ac. Aqq. *Plures magnitudines v. g.* 3. 3. 3. *continue ſic multiplicantur,* 3 *per* 3 *facit* 9, *&* 9 *per* 3 *facit* 27.

16 Magnitudo C magnitudinem H dividere dicitur, cum talis invenitur magnitudo B, Quotus dicta: ita ut diviſor C ſit ad dividendam H, ut unitas (quæ dicatur A) ad quotum B.

Quotus ex H *diviſo per* C, *ſic ſolet notari* $\frac{H}{C}$: *cum diviſio ita fit in numeris, ut diviſor v. g.* 4 *non excedat dividendum* 8, *tunc quotus* $\frac{8}{4}$ (*h. e.* 8 *partes* 4tæ) *dicitur fractio impropria: ſimiliter* $\frac{3}{3}$; *nam ille eſt numerus integer, hic vero unitas, more fractionum notati.*

COR. I. Patet, quod integrum unitate majus magnitudinem dividens, eam minuit, fractio vero auget, in ratione diviſoris ad unitatem.

Sic

Sic dividendo 12 per 3, invenitur 4; & dividendo 12 per $\frac{1}{3}$, *efficitur 36. nam eſt* 3 : 12 :: 1 : 4. *&* $\frac{1}{3}$: 12 :: 1 : 36. *Quod ad* 5. th. *hinc non pendet.*

COR. 2. Patet, perinde eſſe, ſive magnitudo quævis dividatur per diviſorem, ſive multiplicetur per diviſoris partem unicam ab ipſo denominatam.

Hoc eſt, v. g. ſive 12 *dividatur per* 3, *ſive multiplicetur per* $\frac{1}{3}$; *nam utrobique procreatur* 4, *ſecundum def. multipl. & diviſ.*

17 Magnitudo magnitudinem dividens abſque reſiduo dicitur eam metiri. ſic 2 eſt menſura numeri 8.

18. Ex aliqua poteſtate dicitur radix extrahi, quando invenitur magnitudo quæ in ſeipſam continue multiplicata datam produxit poteſtatem. ſic 3 eſt radix quadrata numeri 9, cubica numeri 27. &c.

19. Radix numeri qui vera poteſtas non eſt, qualis eſſe ſupponitur, ut & magnitudinis cujuſcunque ipſo deſignatæ, vocatur Surda, h. e. (ut poſtea) vero numero non explicabilis; ut radices quadrata & cubica numeri 6; notantur ſic, $\sqrt{6}$, $\sqrt{c.\ 6}$ vel $\sqrt[3]{}$. 6. quarum illa eſt inter 2 & 3, hæc inter 1 & 2.

Not. 1. *Licet duæ tantum ſint poteſtates Geometricæ, Quadratum ſcil. & Cubus; ex ductu ſeu motu originem ducentes; numero tamen infinitæ ſunt quarumvis magnitudinum poteſtates Analyticæ per multiplicationem factæ: quæ quoniam eandam inter ſe habent relationem, quam Geometricæ, nominibus geometricis inſigniuntur.*

20. Ratio ex rationibus componi dicitur, cum ex earum multiplicatione producitur : ut ratio AD : BC, ex A : B & D : C.

21. Rationum poteſtates dicuntur duplicatæ, triplicatæ &c. earum quarum ſunt poteſtates.

Sic notantur, $A^2 : B^2 = A : B$ *bis.* $A^3 : B^3 = A : B$ *ter. & ſic leguntur, ratio quadrati ex* A *ad quadratum ex* B *eſt duplicata rationis quam habet* A *ad* B.

 22. Mag-

22. Magnitudines iſtæ dicuntur commenſurabiles quas eadem menſura metitur. Incommenſurabiles vero quas nulla menſura metitur.

Sic lineæ v. g. 8. pedum & 13 pedum ſunt commenſurabiles, quia linea unius pedis continetur in una octies præciſe, & in altera tredecies. Item $\sqrt{18}$ & $\sqrt{50}$. (aut magnitudines quæcunque iis deſignatæ) nam $\sqrt{2}$ continetur in $\sqrt{18}$ per $\sqrt{9}$, h. e. ter, & in $\sqrt{50}$ per $\sqrt{25}$, h. e. quinquies; quare eſt $\sqrt{18} : \sqrt{50} :: 3 : 5$. ut poſtea patebit. Sed $\sqrt{12}$ & $\sqrt{15}$ nullam menſuram ſibi habent communem; nam $\sqrt{3}$ dividit $\sqrt{12}$ per $\sqrt{4}$, i. e. 2; ſed $\sqrt{15}$ per $\sqrt{5}$, i. e. 2 & partem unitatis inexplicabilem, ideo ratio $\sqrt{12} : \sqrt{15}$ veris numeris exprimi nequit.

* Not: *Sermonem hic fieri de menſura actuali, ſeu ipſarum magnitudinum, qualem ipſæ v. g. $\sqrt{12}$ & $\sqrt{15}$ nullam habent; licet ipſarum quadrata 12 & 15 habeant 3 pro menſura communi; ob quod $\sqrt{12}$ & $\sqrt{15}$ dicuntur actu incommenſurabiles, ſed potentiâ commenſurabiles, ideoque $\sqrt{3}$ ipſarum menſura tantum potentialis.*

In ſequentibus præterea uſurpantur hæc ſigna.

A = B	Significant	A et B ſunt æquales.
A > B		A eſt major quam B.
A < B		A eſt minor quam B
A ⊓ B		A et B ſunt commenſurabiles
A ⌐⊓ B		A et B ſunt incõmenſurabiles
N : N		Ut Numerus ad numerum.

In citationibus ultimus numerus indicat librum, penultimus theorema, antepenultimus corollarium problema aut Scholium.

A X I O M A T A.

1. Totum eſt æquale omnibus ſuis partibus ſimul ſumptis; Ac proinde eſt qualibet earum majus.

2. Quæ eidem vel æqualibus ſunt æqualia, ſunt æqualia inter ſe. & quod uno æqualium majus eſt aut minus, eſt item

altero

altero majus aut minus: ſive quantitates ſimpliciter fuerint, ſive rationes. E. 11. 5.

3. Si æqualibus addas aut demas æqualia; tota, ſic etiam reſidua, erunt æqualia. Inæqualia vero, ſi inæqualia addas aut demas.

4. Si inæqualibus addas aut demas æqualia; tota, ſic etiam reſidua, erunt inæqualia, eodem prorſus modo quo ipſa propoſita.

5. Si inæqualibus inæqualia addas, majori majus, & minori minus; tota erunt inæqualia.

6. Si inæqualibus inæqualia demas, a majore minus, & a minore majus; reſidua erunt inæqualia.

7. Si minus a majore auferatur quoties poteſt; majus vel exhaurietur; vel reſiduum erit ablato minus.

8. Quod eſt minore minus, eſt majore multò minus.

9. Majore majus, eſt minore multo majus.

10. Dimidium majoris excedit dimidium minoris; & ſic de alia quacunque aliquota.

11. Eadem vel æquales ad eandem magnitudinem vel æquales, eandem habent rationem. ſeu ut *ex 9. def.* eas æque continent vel in ijs continentur E. 7. 5.

12. Quæ ad eandem magnitudinem vel æquales eandem habent rationem, æquales ſunt inter ſe. &. Ad quas eadem magnitudo vel æquales eandem habet rationem, Iſtæ quoque ſunt inter ſe æquales. E. 9. 5.

13. Ad eandem magnitudem major majorem rationem habet, quam minor. Sed e contra, Eadem magnitudo majorem rationem habet ad minorem, quám ad majorem. E. 8. 5.

14. Quæ ad eandem magnitudinem rationem habet majorem, illa major eſt. (eam quippe magis continet, vel in ea minus continetur, quam altera) Ad quam vero eadem magnitudo majorem habet rationem, illa minor eſt. E. 10. 5.

15. Similes partes ad ſua tota eandem habent rationem. (vid. 6. def.) Ideoque quantitates ſimplices eandem habent rationem ad ſuas æquimultiplices. Nam iſtæ ſunt harum ſimiles aliquotæ. ſic eſt B: BC:: D: DC. & 2 : 6 :: 4 : 12.

16. Magni-

16. Magnitudo quotcunque magnitudines metiens, compoſitam quoque ex ipſis metitur.

17. Magnitudo quamcunque magnitudinem metiens, metitur quoque omnem quam illa metitur.

18. Magnitudo metiens totam magnitudinem & ablatam, metitur & reliquam.

19. Si ſit prima ad ſecundam, ut tertia ad quartam; (A : B : : C : D) Tunc erit (*invertendo*) ſecunda ad primam, ut quarta ad tertiam. (h. e. B : A : : D : C) E. c. 4. 5.

Nam A & C eodem modo continere B & D, & has in illis eodem modo contineri, idem prorſus ſunt. E. 26. 5.

20. Si prima majorem habeat rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam; (A : B > C : D) Tunc (*invertendo*) ſecunda minorem habebit rationem ad primam, quam quarta ad tertiam, (h. e. B : A < D : C)

Nam ſi A magis contineat B, quam C continet D; tunc B magis continetur in A, quam D in C.

21. Si æqualia (A. a) multiplicent vel dividant æqualia : (B, b) Erunt producta, item quoti, inter ſe æqualia. ($AB = ab$, $\frac{B}{A} = \frac{b}{a}$)

Per def. mult. 1 : *A* : : *B* : *AB*, & 1 : *a* : : *b* : *ab*; *ſed* (11. *ax.*) 1 : *A* : : 1 : *a*, *Erg.* (2 *ax.*) *B* : *AB* : : *b* : *ab*; *ideoque* (12. *ax.*) *AB* = *ab*. *Similiter per def. div. probatur eſſe* $\frac{B}{A} = \frac{b}{a}$.

POSTULATA.

1. Datæ magnitudini finitæ aliam datam addere liceat.

2. Datæ magnitudini finitæ majori minorem detrahere licet quoties poteſt.

3. Quamlibet magnitudinem finitam toties multiplicare liceat, donec quamlibet aliam finitam ejuſdem generis excedat.

SCHOL. I.

Ut magnitudinum cujuſvis generis multiplicatio diviſio & radicum extractio clarior fiat, multiplicationem in lineis unico exemplo

exemplo illuſtrabimus. ſit linea C 6 pedum multiplicanda per B lineam 4 pedum, & A linea 2 pedum ponatur pro unitate; ſic A erit 1 binarius pedum, B 2 binarij, C 3 binarij: dein inveniatur quarta linea, quæ dicatur H, ad quam ita ſe habeat C, ut A ad B: hæc H (per 14 def.) erit linea producta continens 6 binarios pedum ſeu 12 pedes. Similiter ſi linea 1 pedis ponatur pro unitate, linea producta erit 24 pedum; Nam eſt 1 pes ad 4 pedes, ut 6 pedes ad 24 pedes.

SCHOL. II.

Quoniam in propoſitionum demonſtrationibus & reſolutionibus problematum ſæpe occurrit magnitudinum ſignis + *&* — *affectarum algorithmus; hujus ideo regulas quod ad ſigna hic tradere viſum eſt. Ubi* Not. *ubicunque nullum exprimitur ſignum, ibidem intelligi eſſe ſignum* +.

Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas, ſervatis ſignis.

Sic A — B *addita ad* A + B, *facit* A + B + A — B, h. e. 2 A. & A + B *addita ad* A — C *facit* A + B + A — C, h. e. 2 A + B — C. *Hæc patent.*

Subſtractio conjungit utramque magnitudinem, mutatis omnibus magnitudinis ſubſtrahendæ ſignis

Sic B + C *ſublatâ ex* + A, *relinquitur* A — B — C; *ſed* — B *ſublatâ ex* + A, *relinquitur* A + B: *Nam tollendo negationem ſeu abſentiam quantitatis* B, *ipſa* B *fit præſens ſeu additur.*

In Multiplicatione & diviſione, item in linearum ductu, eadem ſigna ponunt +, diverſa vero —.

(1.) *Si utrobique ſit* +, *patet; nam ex poſitivis reſultat quantitas poſitiva.*

(2.) $A \times \overline{B - C}$ *facit* $AB - AC$. *Nam eſt* $B = C + B - C$, *ideo* (21. *ax*) *eſt* $AB = AC + A \times \overline{B - C}$, Erg. *utrinque ablato* AC, *erit*

AB

$AB - AC = A \times \overline{B - C}$, *Similiter in diviſ. Quia* $B = C + \overline{B - C}$, *erit* $\frac{B}{A} = \frac{C}{A} + \frac{B-C}{A}$, Erg. $\frac{B}{A} - \frac{C}{A} = \frac{B-C}{A}$.

(3.) $- A \times \overline{B - C}$ *facit* $- AB + AC$. *Nam eſt* $B = C + \overline{B - C}$, *& multiplicando per* $-A$, *erit* $- AB = - AC - A \times \overline{B - C}$, *& utrinque addito* AC, *erit* $- A \times \overline{B - C} = - AB + AC$. *Similiter prorſus probatur* $\frac{B-C}{-A}$ *facere* $- \frac{B}{A} + \frac{C}{A}$; *nam eſt* $B = C + \overline{B - C}$, *& divid. per* $-A$, *erit* $- \frac{B}{A} = - \frac{C}{A} + \frac{B-C}{-A}$, *& utrinque addito* $\frac{C}{A}$ *erit* $\frac{B-C}{-A} = - \frac{B}{A} + \frac{C}{A}$.

CAP. I.

De Magnitudinibus Proportionalibus.

THEOR. I.

SI una magnitudo aliam multiplicet, & productum per eandem dividatur; Manebit ſibi æqualis. (*h. e.* $A = \frac{AB}{B} = \frac{ABC}{BC}$. *&c.*)

Per. def. multipl. eſt 1 : A : : B : AB, & AB diviſo per B, eſt *per def. div.* B : AB : : 1 : $\frac{AB}{B}$; Erg. *per.* 2. *ax.* eſt 1 : A : : 1 : $\frac{AB}{B}$, ideoque *per* 12. *ax.* eſt $A = \frac{AB}{B}$ Similiter $A = \frac{ABC}{BC}$ &c. Q. E. D.

THEOR. 2.

Si rationes ſint æquales; Tunc ipſarum quoti ſunt æquales. (*h. e, Si* $A : B = C : D$, *erit* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$) *& e contra.*

Ex hy. A : B :: C : D, & *invert.* B : A :: D : C; ſed diviſo A per B, & C per D, erit *per. def. div.* B : A :: 1 : $\frac{A}{B}$, & D : C :: 1 : $\frac{C}{D}$; ſed *ut jam*, eſt B : A :: D : C, Erg. *per 2. ax.* eſt 1 : $\frac{A}{B}$ :: 1 : $\frac{C}{D}$, ideoque *per 12. ax.* eſt $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$. Q.E.D.

Converſa. *Ex hyp.* $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, ideoque *per 11. ax.* 1 : $\frac{A}{B}$ :: 1 : $\frac{C}{D}$; ſed *per def. div.* eſt B : A :: 1 : $\frac{A}{B}$ & D : C :: 1 : $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$; Erg. *per 2. ax.* eſt B : A :: D : C, & *invert.* A : B :: C : D. Q.E.D.

Not. I. *Hinc, non incommode rationis quantitas æſtimatur per ſuum quotum.*

Not. II. *hujus converſæ demonſtratio eſt ipſius directæ demonſtratio ordine inverſo poſita, ab ultima concluſione exordiens : ad quem modum omnium propoſitionum ſequentium quæ convertuntur, converſæ ſimiliter probari poſſunt.*

THEOR. 3.

Si termini cujuſvis quoti eandem magnitudinem multiplicent; vel per eam multiplicentur; Quotus idem quantitate manebit. (*h. e,* $\frac{Z}{B} = \frac{ZC}{BC} = \frac{CZ}{CB}$)

I. Poſito AB = Z, erit $\frac{AB}{B} = \frac{Z}{B}$, & $\frac{ABC}{BC} = \frac{ZC}{BC}$: 21. *ax.* ſed *per 1.* eſt $\frac{AB}{B} = A = \frac{ABC}{BC}$: Erg. reſtituto Z in ſuum locum pro AB, erit $\frac{Z}{B} = \frac{ZC}{BC}$. Q.E.D. 1°.

Ubi Not: cum per def. mult. $\frac{Z}{B}$ *multiplicans* 1, *producat* $\frac{Z}{B}$ *ſeu* $\frac{ZC}{BC}$, *&* per def. div. *ſit* $\frac{C}{C} = 1$, *Patet quod* $\frac{Z}{B}$ *multiplicans* $\frac{C}{C}$, *producat* $\frac{ZC}{BC}$: *atque ſic*

multiplicatio

multiplicatio quotorum quorum alter unitati æquatur, ſit multiplicando terminos homologos, & claritatis cauſâ, multiplicans hic ponitur prior in producto, uſque dum permutatio rationis probata fuerit: ſic $\frac{Z}{B}$ *eſt multiplicans in* $\frac{ZC}{BC}$, *& ſimiliter* $\frac{C}{C}$ *in* $\frac{CZ}{CB}$ *producto.*

Dem. 2. *Per Not.* eſt $\frac{ZC}{BC}=\frac{Z}{B}\times\frac{C}{C}$, & $\frac{CZ}{CB}=\frac{C}{C}\times\frac{Z}{B}$; ſed $\frac{Z}{B}\times 1=1\times\frac{Z}{B}$ (ſeu $\frac{Z}{B}\times\frac{C}{C}=\frac{C}{C}\times\frac{Z}{B}$) Erg. *per* 2 *ax.* $\frac{ZC}{BC}=\frac{CZ}{CB}$; ſed *per* 1. *part.* eſt $\frac{Z}{B}=\frac{ZC}{BC}$, ideoque *per* 2. *ax.* $\frac{Z}{B}=\frac{CZ}{CB}$. Q. E. D. 2°.

THEOR. 4. E. 19. 7.

Si ſit prima ad ſecundam, ut tertia ad quartam; Tunc factum ab extremis æquatur facto a medijs. (h. e. Si A : B :: C : D, erit AD = BC) & e contra, ſeu, Æqualium factorum factrices ſunt reciproce proportionales.

Per. 2. eſt $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, verum multiplicatâ D *per.* A & B, atque C & D *per* B, erit *per.* 3. $\frac{AD}{BD}=\frac{A}{B}$, & $\frac{BC}{BD}=\frac{C}{D}$, ideoque *per* 2. *ax.* $\frac{AD}{BD}=\frac{BC}{BD}$ & *per conv.* 2. AD : BD :: BC : BD, Erg. *per* 12. *ax.* eſt AD = BC. Q. E. D.

PROBL. *Hinc tribus datis A B. C. invenitur quarta proportionalis* $\frac{BC}{A}$ *Multiplicando ſcil. tertiam per ſecundam, & productum dividendo per primam.*

Cum *per. def. div.* ſit A : BC :: 1 : $\frac{BC}{A}$, erit $A\times\frac{BC}{A}$ = BC, ideoque *conv. huj.* A : B :: C : $\frac{BC}{A}$.

Eiſdem datis prima proportionalis eſt $\frac{AB}{C}$; 2da. $\frac{AC}{B}$, 3tia $\frac{AC}{B}$.

Arithmetica tradit modum ſpecialem multiplicandi, & dividendi numeros, & Geometria lineas: hic tantum oſten-

ditur

ditur proportio in iſtis operationibus obſervata, & modus productum & quotum per literas repræſentandi in quacunque ſpecie quanti.

THEOR. 5.

Si ſit prima ad ſecundam, ut tertia ad quartam (A: B :: C : D) Erit (permutando) prima ad tertiam, ut ſecunda ad quartam. (A: C :: B : D)

Per 2. eſt $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, Sit E $= \frac{A}{B}$, ideoque $= \frac{C}{D}$: erit 21. *ax.* BE $=$ B $\times \frac{A}{B}$, h. e. BE $=$ A, (utpote *per def. div.* eſt B : A :: 1 : $\frac{A}{B}$; ideoque *per.* 4. B $\times \frac{A}{B} =$ A) Similiter eſt DE $=$ C. ideo 21. *ax.* eſt $\frac{A}{C} = \frac{BE}{DE}$ vel *per* 3. $\frac{B}{D}$: Erg. *conv.* 2. eſt A: C :: B: D. Q. E. D.

COR. 1. *Ex* 15. *ax. & hinc Patet, Similes partes eſſe inter, ſe ut ſua tota.* E. 15. 5.

COR. 2. *In quatuor proportionalibus, ſi prima ſit æqualis, major aut minor tertiâ; Secunda item erit æqualis, major aut minor quartâ.* E. 15. 5.

COR. 3. *Producta eſſe æqualia, ſi factores ſint æquales, ſeu utrumvis producti factorem ſumi poſſe pro multiplicante. (h. e. AB = BA)*

Nam per def. mult. *eſt* 1 : A :: B: AB, & 1 : B :: A BA; Erg. *permut.* eſt 1 : A :: B :: BA, ideo *per* 2. *ax.* B : AB :: B : BA, Erg. *per.* 12. *ax.* AB $=$ BA.

SCHOL. *Permutatio rationis locum non habet in magnitudinibus diverſorum generum. Sic lineæ non referuntur ad ſuperficies, aut utravis harum ad corpora. Ideo ſi per* 4 th. *ex* $DA^2 = BC^2$ *inferres* $A : B :: C^2 : D^2$, *non dicendum foret* $AD^2 : BD :: BC^2 : BD$, *ſed* $AD^2 : BD_2 :: BC^2 : BD^2$; *nam inter quantitates diverſarum dimenſionum non datur ratio.*

THEOR.

THEOR. 6.

Si plures magnitudines per eandem multiplicentur, aut dividantur; Tunc producta multiplicatis, quoti diviſis erunt proportionales. (*h e,* $A : B :: CA : CB$, *&* $\frac{A}{C} : \frac{B}{C}$)

1. *Per def. mult.* eſt $1 : C :: A : CA$, & $B : CB$; ideo *per.* 2 *ax.* $A : CA :: B : CB$, & *perm.* $A : B :: CA : CB$. Q. E. D. 1°.

2. *per def. div.* eſt $C : A :: 1 : \frac{A}{C}$, & $C : B :: 1 : \frac{B}{C}$; & *perm.* $C : 1 :: A : \frac{A}{C}$, & $B : \frac{B}{C}$, ideo *per* 2. *ax.* & *perm.* $A : B :: \frac{A}{C} : \frac{B}{C}$. Q. E. D. 2°.

PROBL. *Hinc & 3. Rationes aut quotos ſeu fractiones ad eundem conſequentem ſeu denominationem reducere,* (*h. e,* $\frac{A}{D}$ *&* $\frac{C}{D}$ *ad* $\frac{DA}{DB}$ *&* $\frac{BC}{BD}$ *iſtis æquales*) *multiplicando ſcil. terminos unius per denominatorem alterius.*

COR. *Hinc patet quotos aut fractiones ejuſdem conſequentis eſſe inter ſe ut antecedents. v. g.* $\frac{A}{B} : \frac{C}{B} :: A : C$: *Ac proinde eorum additio fit retento communi conſequente, addendo antecedentes; ſicut ſubſtractio ſubſtrahendo unum ab altero; ſed diviſio fit tantum dividendo unum antecedentem per alterum.*

THEOR. 7.

Si quatuor proportionalium termini homologi æque multiplicentur aut dividantur; manebunt proportionales. (*h. e. Si* $A : B :: C : D$, *Erit* $ZA : B :: ZC : D$, $A : ZB :: C : ZD$, *&* $\frac{A}{Z} : B :: \frac{C}{Z} D$, $A : \frac{B}{Z} :: C : \frac{D}{Z}$) *& contra.*

Pate

Patet 1. *Nam perm.* eſt A : C :: B : D, ideo *per.* 6. ZA : ZC :: A : C, vel B : D, & *perm.* ZA : B :: ZC : D. Similiter de 2do. Sed pro 3tio. dic, ideo $\frac{A}{Z} : \frac{C}{Z}$ :: B : D, *Erg. perm.* $\frac{A}{Z}$: B :: $\frac{C}{Z}$: D. Similiter de 4to. Q. E. D.

THEOR. 8. E 12 & 19. 5.

Si ut prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam, & quinta ad ſextam &c. Tunc erit ut unus antecedens ad ſuum conſequentem, ita ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium. [a]& (ſi tantum ſint quatuor) ita differentia ad differentiam. (h. e, Si A : B :: C : D, Erit A : B :: A + C : B + D, & A — C : B — D. Item A : B :: C + A : D + B, & C — A : D — B) & contra.

Dem. *Per* 4. *eſt* AD = BC, utrinque addito AB; erit *per* 3. *ax.* AB + AD = AB + BC, & *per conv.* 4. A : B :: A + C : B + D. Verum utrinque addito A B & ablatis æqualibus, hinc, 2 BC, illinc 2 AD, erit *per* 3. *ax.* AB — AD = AB — BC; Erg. *per conv.* 4. A : B :: A — C : B — D; & ſic de reliquo. Q. E. D.

Secunda hujus pars ſic effertur ab Eucl. *Si totum ad totum, ut ablatum. &c.*

THEOR. 9. E. 18. 9.

Si ſit prima ad ſecundam, ut tertia ad quartam: Tunc erit (componendo) ſumma primæ & ſecundæ ad primam vel ſecundam, ut ſumma tertiæ & quartæ ad tertiam vel quartam. he. e. Si A : B :: C : D, Erit A + B : A :: C + D : C. & A + B : B :: C + D : D, & contra.

Dem. *Per.* 4. *eſt* BC = AD, utrinque addito AC. erit AC + BC = AC + AD; Erg. *conv.* 4. A + B : A :: C + D : C. Q. E. D. 1°. Sed utrinque addito BD, erit AD + BD = BC + BD, Erg. *conv.* 4. A + B : B :: C + D : D. Q. E. D. 2°.

THEOR.

— C > *B* — D, *per* 2 c. 5. & utrinque addito C + D, it *per* 4 *ax.* A — C + C + D > *B* — D + C + D, i.e. D + A > *B* + C. Q. E. D.

LEMMA. E. I. 10.

Fig. *Si a magnitudine propoſita A B auferatur dimidium A H, & a reliquo rurſus dimidium H I, & hoc ſemper fiat; Relinquetur tandem quædam I B magnitudo quavis aſſignabili C minor.*

Dem. ſume C toties donec ejus multiplex DE proxime excedat AB *per* 3 *poſt* ſintque DF, FG, GE, C, æquales. Deme ex AB dimidium AH, & a reliquo HB aufer dimidium IH, & ſic deinceps, donec partes AH, IH, IB, æque multæ ſint ac *B*F, FG, GE. Jam liquet *per* 10 *ax.* eſſe $\frac{1}{2}$ DE > H*B*, ideoque *per* 9. *ax.* FE > HB; Erg. *per* 10 *ax.* eſt GE > IB: ſed *ex conſtr.* eſt C = GE; Erg. *per* 2 *ax.* eſt C > IB. Q. E. *D.*

THEOR. 13. Tacq.

Si ſit prima ad ſecundam, ut tertia ad quartam; A : B :: C : D, Tunc ſimiles partes ſecundæ & quartæ, ex bipartitione ortæ, $\frac{B}{Z}$, $\frac{D}{Z}$, *æque ſæpe ſemper auferri poſſunt e prima & tertia, A & C: Et e contra.*

Prius patet, Nam *per* 7. eſt A : $\frac{B}{Z}$ :: C : $\frac{D}{Z}$; ideoque cum $\frac{B}{Z}$ & $\frac{D}{Z}$ eodem modo contineantur in A & C, æque ſæpe ab ijſdem auferri poſſunt.

Dem. conv. Si dicatur ratio A: B > C :: D, fiat *per probl.* 4. A — R : B :: C : D. per continuam 2dæ B bipartitionem tandem *per lem.* perveniri poteſt ad aliquam aliquotam $\frac{B}{Q}$ < R. Hæc $\frac{B}{Q}$ *ex hyp.* æque ſæpe auferri poteſt ex A, quam $\frac{D}{Q}$ ex C; ſed *per* 1 *part.* $\frac{B}{Q}$ æque ſæpe auferri poteſt ex A — R, quam $\frac{D}{Q}$ ex C, Erg. $\frac{B}{Q}$ < R

æque

æque ſæpe auferri poteſt ex A — R, quam ex A. Q. E. A. Similiter probari poteſt non eſſe. C : D > A : B, Erg. eſt A : B : : C : D. Q. E. D.

THEOR. 14. E. cor. 12. & c. 19. 5.

Similium proportionalium ſummæ, ut & differentiæ, ſunt proportionales, eademque manet ratio. (h. e. Si A : B : : C : D, & a : b : : c : d, et ſit A : B = a . b, Erit A + a : B + b : : C + c : D + d) Et e contra.

Dem. *Ex hyp.* A : B : : a : b, & C : D : : c : d, ideo *per* 8. A : B : : A + a : B + b, & C : D : : C + c : D + d. Erg. *per* 2 *ax.* A + a : B + b : : C + c : D + d. Similiter prorſus oſtenditur de differentijs.

Not. In hoc & 17° per differentiam intelligi exceſſum prioris ſupra poſteriorem.

THEOR. 15. E. 22. 5.

Si in duobus proportionalium quaternarijs (A : B : : C : D, & B : E : : D : F) antecedentes poſterioris ſint conſequentes prioris : Tunc (ex Æqualitate ordinata,) *antecedentes prioris conſequentibus poſterioris erunt directe proportionales. (h. e. erit A : E : : C : F.) Et e contra.*

Dem. *Permut.* eſt A : C : : B : D, & B : D : : E : F, Erg. *per* 2 *ax.* eſt A : C : : E : F, & *perm.* A : E : : C : F. Q. E. D. Similiter ſi plures duobus eſſent quaternarij.

THEOR. 16. E. 23. 5.

Si in duobus proportionalium quaternarijs (A : B : : C : D, & B : E : : F : C) extremi poſterioris ſint medij prioris : Tunc (ex æqualitate perturbata,) *extremi prioris erunt medijs poſterioris reciproce proportionales. (h. e. erit A : E : : F : D) Et e contra.*

Per 4. eſt AD = BC, & BC = EF, ideo AD = E F. Erg.

Erg. per *conv.* 4. eſt A : E : : F : D. Q. E. D. Similiter ſi plures.

THEOR. 17. E. 24. 5.

Si in duobus proportionalium quaternarijs (A : B : : C : D. & E : B : : F : D) ijdem fuerint conſequentes; Tunc antecedentium ſummæ, ut & differentiæ, erunt conſequentibus proportionales. (h. e. A + E : B : : C + F : D. Item A — E : B : : C — F : D) Et e contra.

Per 4. Eſt AD = BC, & ED = BF; Erg. *Per* 3 *ax.* AD + ED = BC + BF; ideo *Per conv.* 4. eſt A + E : B : : C + F : D. Q. E. D. 1°. Similiter prorſus probatur de differentijs.

LEMMA.

Multiplicato quoti aut rationis antecedente, multiplicatur ipſe quotus aut ratio. (h. e. $\frac{CA}{B} = C \times \frac{A}{B}$, & $\frac{CA}{B} = C \times \frac{A}{B}$)

Per *pr.* 4. eſt B : A : : C : $\frac{AC}{B}$, & B : A : : 1 : $\frac{A}{B}$; Erg. *per* 2 *ax.* 1 : $\frac{A}{B}$: : C : $\frac{AC}{B}$. Erg. *per* 4. $C \times \frac{A}{B} = \frac{AC}{B}$ Erg. *per* 2. $C \times \frac{A}{B} = \frac{AC}{B}$.

THEOR. 18. a S. vinc.

Rationes ejuſdem conſequentis ſunt inter ſe ut antecedentes (h. e. $\frac{A}{B} : \frac{C}{B}$: : A : C)

Per Lem. $C \times \frac{A}{B}$ facit $\frac{AC}{B}$, & $A \times \frac{C}{B}$ facit $\frac{AC}{B}$; ſed 3 c. 5. eſt AC = CA, ideo *per* 11 *ax.* $\frac{CA}{B} = \frac{AC}{B}$, Erg. *per conv.* 4. $\frac{A}{B} : \frac{C}{B}$: : A : C. Q. E. D.

COR. *Hinc patet ejuſmodi rationum additio ſubſtractio & diviſio ſicut in quotis ſeu fractionibus.*

THEOR. 19. à S. vinc.

Rationes ejuſdem antecedentis ſunt ſuis conſequentibus reciproce proportionales. (h. e. $\frac{A}{B} : \frac{A}{C} :: C : B$) *Idem de fractionibus.*

Rationes $\frac{A}{B}$ *&* $\frac{A}{C}$ ad communem conſequentem *per Probl.* 6. reductæ ſunt $\frac{AC}{BC}$ & $\frac{AB}{BC}$; ſed *per præc.* ſunt :: AC : AB, & *per* 6. AC : AB :: C : B, & $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$ & $\frac{AB}{CB} = \frac{A}{C}$; Erg. *per* 2 *ax.* eſt $\frac{A}{B} : \frac{A}{C} :: C : B$. Similiter probatur de $\frac{A}{B}$ & $\frac{A}{C}$, pro præc. citando *cor.* 6. Q. E. D.

THEOR. 20.

Rationes ſunt inter ſe, ut ipſarum quoti. (h. e. $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} :: \frac{A}{B} : \frac{C}{D}$.

Per 18. *&* c 6. Eſt : $\frac{DA}{DB} : \frac{BC}{DB}$ & $\frac{DA}{DB} : \frac{BC}{DB}$ :: DA : BC, & his *per* 6. & 3. æquantur iſtæ $\frac{A}{B}$. $\frac{C}{D}$. $\frac{A}{B}$. $\frac{C}{D}$. Erg. $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} :: \frac{A}{B} : \frac{C}{D}$. Q. E. D.

THEOR. 21. E. 5. def. 6.

Quotus ex quotorum, Ratio ex rationum multiplicatione producitur, ſeu ex ijs componitur, cum horum termini homologi in ſe invicem multiplicantur. (h. e. $\frac{AC}{BD} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$ *&* $\frac{AC}{BD} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$)

Per 3 *c.* 5. eſt BD AC = AD BC, igitur *per conv.* 4. BD : AD :: BC : AC; Erg. *per* 6. $\frac{BD}{BD} : \frac{AD}{BD} :: \frac{BC}{BD} : \frac{AC}{BD}$; ideoque his æquales ſunt etiam proportionales, ſcil. $1 : \frac{A}{B} :: \frac{C}{D} : \frac{AC}{BD}$, ac proinde *per def.*

mult.

mult. quotus $\frac{AC}{BD}$ fit ex $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$. Quod. 1°. Erg. *per* 2. eſt $\frac{AC}{BD} = \frac{A}{B} \times \frac{C}{D}$. Q. E. D. 2°.

COR. *Ex 3 Cor. 5 & hinc patet, Rationes ex æqualibus rationibus compoſitas, eſſe inter ſe æquales. (h. e. ſi ſit* $A:B = C:D$, & $E:F = G:H$; *Erit* $AE:BF = CG:DH$. *Item æquales eſſe rationum æqualium duplicatas* & *triplicatas* &c. (*h. e. Si* $A:B = C:D$, *Erit* $AA:BB = CC:DD$) *Et e contra.* E. c. 23. 5.

THEOR. 22. E. 20. *def.* 5.

Si fuerint quotcunque magnitudines (A. B. C. D. &c.) Ratio primæ ad ultimam A : D *componitur ex rationibus mediarum.* ($A:B \times B:C \times C:D$)

Ratio A B : BC *per præc.* componitur ex $A:B \times B:C$; ſed *per* 6. AB : BC : : A : C, Erg. ratio A : C componitur ex $A:B \times B:C$. Similiter probari poteſt rationem A : D componi ex $A:C \times C:D$. Erg. A : D componitur ex $A:B \times B:C \times C:D$. Q. E. D.

COR. E. 10. def. 5. *Si magnitudines quotcunque fuerint continue proportionales, (A. B. C. D. E ∺) Tunc erit ratio* $A:C = A:B$ *bis ſeu* $A^2:B^2$, & $A:D = A:B$ *ter*, & $A:E = A:B$ *quater ſeu* $A^4:B^4$, & *ſic deinceps uno amplius, quamdiu proportio exſtiterit. Vel ſic. Erit ut prima ad ultimam, ſic poteſtas primæ æquimultiplicata numero terminorum minus uno, ad ſimilem poteſtatem ſecundæ.*

PROBL. *Datis quotcunque rationibus, hinc facile invenire rationem ex ijs omnibus compoſitam.*

THEOR. 23. Ouchtr.

* *Productæ magnitudines ſimiliter figuratæ* (i. e. *quarum factrices ſunt proportionales*) *ſunt in ratione laterum homologorum æquimultiplicata numero dimenſionum ex quibus componuntur.*

Sint

Sint duæ magnitudines v. g. quatuor dimenſionum, A B C D & E F G H, quorum latera homologa ſunt ut R : S, dico eſſe A B C D : E F G H :: $R^4 : S^4$. Nam *ex hyp.* eſt A : E :: R : S, & B : F :: R : S, & C : G :: R : S, & D : H :: R : S; Erg. Rationibus iſtis utrinque continue multiplicatis *per* 21. ſcil. A : E × B : F × C : G × D : H, & R : S in ſe quater, erit *per cor.* 21. A B C D : E F G H :: $R^4 : S^4$. Q. E. D.

COR. *Similes poteſtates ſunt in ratione ſuorum laterum æquimultiplicata numero dimenſionum; ut quadraticæ in duplicata, cubicæ in triplicata &c.*

THEOR. 24. Ouchtr.

* [1] *Si poteſtas A^e ſimilem B^e multiplicet, producetur ejuſdem generis poteſtas $A^e B^e$ cujus radix eſt productum a radicibus A & B poteſtatum multiplicatarum.* [2] *Item ſi poteſtas A_e ſimilem $A^e B_e$ dividat; tunc naſcitur ejuſdem generis poteſtas B_e cujus radix eſt ipſa B radix poteſtatis dividendæ per dividentis radicem diviſa.*

Patet 1. Nam AB vel A × B elevata ad poteſtatem cujus exponens eſt e, facit $A^e B^e$, *h. e.* $A^e \times B^e$.

Patet 2. Nam $A^e B^e$ pro ſua radice habet A B; & diviſa per A^e habet B^e pro quoto; ſed $\sqrt{e}$. B^e eſt B, *h. e. per* 1 *th. & 3 Cor. 5.* $\frac{BA}{A}$ *ſeu* $\frac{AB}{A}$. *Q. E. D.*

Not. *Hic poni e pro exponente poteſtatis, & $\sqrt{e}$ pro ſigno ejus radicali.*

COR. *Hinc radix ſurda ſurdam homogeneam multiplicans aut dividens, radicem homogeneam producit, ſive ſurdam, ſive numero vero explicabilem.*

Sic $\sqrt{21}$ fit ex $\sqrt{7} \times \sqrt{3}$. & $\sqrt{3}$ ex $\sqrt{21}$ diviſa per $\sqrt{7}$. $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ facit $\sqrt{16}$ ſeu 4. & 4 ſeu $\sqrt{16}$ diviſa per $\sqrt{2}$, dat $\sqrt{8}$. (4 reducto ad idem ſignum radicale cum $\sqrt{2}$) &

4 ſeu

4 ſeu $\sqrt{16} \times \sqrt{3}$ facit $\sqrt{48}$. Similiter $\sqrt{A} \times \sqrt{E}$ facit $\sqrt{AE}$, & $\sqrt{AE}$ diviſa per $\sqrt{A}$ dat $\sqrt{E}$.

THEOR. 25. Ouchtr.

* *In magnitudinum progreſſione Geometrica finita, (∺ A. B. C. D. ω) Differentia ſummæ & ultimi eſt ſumma antecedentium, & differentia ſummæ & primi eſt ſumma conſequentium. ($Z - \omega = A + B + C + D$. & $Z - A = B + C + D + \omega$)*

Patet, Nam omnes termini præter ultimum ſunt rationum antecedentes, & omnes præter primum ſunt conſequentes. *Z* hic ſignificat ſummam progreſſionis.

PROBL. *Hinc & 1 part. 8. Summam invenire* $Z = \frac{B\omega - A^2}{B - A}$.

THEOR. 26. a S. vinc.

* *In progreſſione Geometrica in infinitum decreſcente (A. B. C. D. E. F. G. &c. ∺) differentia primi termini & ſecundi, primus & progreſſionis ſumma, ſunt continue proportionales. (h. e.* $A - B : A :: A : A + B + C + D + E + F + G +$ &c.

Sunt Terminorum proportionalium differentiæ ſimul cum ultimo ω (ſi modo aſſignari poſſet) *h. e.* $A - B$, $B - C$, $C - D$, $D - E$, $E - F$, $F - G$, $G -$ &c. $- \omega$, $+ \omega = A$; ut patet, Sed etiam patet nunquam perveniri poſſe ad ultimum terminum progreſſionis infinitæ, nec ad alium qui ab eo diſtat quovis numero locorum aſſignabili, nedum ad ultimam quantitatem aſſignabilem quantumvis parvam ultimo æqualem; Erg. ultimus terminus in ratione quoti non eſt aſſignalibis; ideoque, propter continuum terminorum decrementum, in ratione quanti evaneſcit: Ac proinde ſunt omnes ſimul ipſæ differentiæ $A - B$, $B - C$,

C — D, D — E, E — F, F — G, G — &c. = A. Inſuper *ex hyp.* ſunt A : B :: B : C :: C : D :: D : E :: E : F :: F : G &c. Ideo *divid.* eſt A — B : A :: B — C : B :: C — D : C. &c. Erg. *per* 1 *part.* 8. eſt A — B : A :: A — B, + B — C, + C — D, + D — E, + E — &c. ſeu A : A + B + C + D + E. &c. Q. E. D.

PROBL. *Hinc & ex* cor. 4. *Prædictæ progreſſionis ſummam* $\frac{A^2}{A-B}$ *invenire quantitatis tantum finitæ.*

THEOR. 27.

In progreſſione Arithmetica (A. A + Z. A + 2Z. A + 3Z. A + 4Z) Extremorum major minorem ſuperat per differentiam numero terminorum minus uno multiplicatam.

Patet ex æquali ſemper differentia in hac progreſſione.

COR. Hinc, *Ex cognitis extremorum uno & terminorum numero, patet inventio alterius extremi.*

THEOR. 28.

In tribus Arithmetice proportionalibus, (A. A + Z A + 2Z. vel A. A — Z. A — 2Z) ſumma extremorum eſt dupla medij. Item in quatuor, (A, A + Z. A + 2Z. A + 3Z) ſumma extremorum æquatur ſummæ mediorum.

Utrumque patet.

THEOR. 29.

In progreſſione Arithmetica (A. A + Z. A + 2Z. A + 3Z. A + 4Z) ſumma extremorum æquatur ſummæ duorum quorumlibet terminorum ab ipſis æquidiſtantium; Item duplo medij, ſiquis ſit.

Utrumque patet.

Probl.

PROBL. *Hinc facile invenitur progreſſionis ſumma, multiplicando ſummam extremorum per ſeminumerum terminorum.*

CAP. 2.

De Magnitudinibus non Proportionalibus.

THEOR. 30. E. 27. 5.

* *SI prima majorem habeat rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam; Tunc* (permut.) *Prima majorem habet rationem ad tertiam, quam ſecunda ad quartam.* (h. e. *ſi* A : : *B* > *C* : *D*, , *Erit* A : *C* > *B* : *D*)

Per Probl. 4. Fiat A : B : : C : Z, *per* 14 *ax.* erit D > Z, harum differentia dicatur R, unde erit A : B : : C : D — R, ideo *perm.* A : C : : B : D — R; ſed *per* 13 *ax.* eſt B : D — R > B : D, Erg. *per* 2 *ax.* A : C > B : D. Q. E. D.

THEOR. 31.

* *Si prima majorem habeat rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam; Tunc prima majorem habebit rationem ad ſecundam, quam ſumma antecedentium ad ſum-*
E. 33. *mam conſequentium. Sed minorem quam differentia an-*
5. *tecedentium ad differentiam conſequentium.* (h. e. *ſi* A : *B* > *C* : D, *Erit* A : *B* > A + *C* : *B* + *D*, *Item* A : *B* > A — *C* : *B* — *D*)

Fiat A : B : : C : Z, ſic erit D > Z, harum differentia dicatur R, unde erit A : B : : C : D — R. Erg. *per* 8. eſt A : B : : A + C : B + D — R; ſed *per* 13 *ax.* eſt ratio A + C : B + D — R > A + C : B + D. Erg. *per* 2 *ax.* eſt

eſt A : B > A + C : B + D. Q. E. D. 1°. Altera pars de differentijs ſimiliter prorſus probatur.

THEOR. 32. E. 28. 5.

* *Si prima majorem habeat rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam; Tunc* (comp.) *ſumma primæ & ſecundæ majorem habebit rationem ad primam vel ſecundam, quam ſumma tertiæ & quartæ ad tertiam vel quartam.* (h. e. *Si* A : *B* > *C* ; *D* , *erit* A + *B* : A *vel B* > *C* + *D* : *C vel D.*)

Fiat Z : B : : C : D, ſic *per* 14 *ax.* A > Z. harum differentia dicatur R. unde eſt A — R : B : : C : D. & (*comp.*) A — *R* + B : A vel B : : C + D : C vel D. ſed *per* 13 *ax.* A — B : A vel B > A — R + B : A vel B. Erg. *per* 2. *ax.* A + B : A vel B > C + D : C vel D. Q. E. D.

THEOR. 33. E. 29. 5.

* *Si prima majorem habeat rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam; Tunc* (divid.) *exceſſus primæ ſupra ſecundam habet majorem rationem ad primam vel ſecundam, quam exceſſus tertiæ ſupra quartam ad tertiam vel quartam.* (h. e. *Si* A : *B* > C : *D*, *erit* A — *B* : A *vel B* > *C* — *D* : *C vel D*)

Fiat A : B : : C : Z, ſic erit D > Z, harum differentia ſit R; unde A : B : : C : D—R. Erg. *(divid.)* A — B : A vel B : : C — *D* + R : C vel *D* — R. ſed *per* 13 *ax.* eſt C — *D* + R : C vel *D* — R > C — *D* : C vel *D* — R , Erg. *per* 2 *ax.* A— B : A vel *B* > C — *D* ; C vel *D* — R > C — D : *D.* Q. E. *D.*

THEOR. 34.

* *Si prima majorem habeat rationem ad ſecundam, quam tertia ad quartam; Tunc quædam aliquota ſecundæ ex bipartitione orta ſæpius auferri poteſt e prima, quam ſimilis aliquota quartæ e tertia* (h. e. *Si* A : *B* > *C* : D, *ſæpius poteſt* $\frac{B}{Z}$ *ex* A, *quam* $\frac{D}{Z}$ *ex C*). *Et e contra.*

Fiat

Fiat H : B : : C : D, erit A $>$ H, harum differentia dicatur R, unde A — R : B : : C : D, & per continuam 2dæ bipartitionem tandem perveniri poteſt ad quandam aliquotam $\frac{B}{Z} <$ R, hæc *per* 13. æque ſæpe auferri poteſt ex A — R, quam $\frac{D}{Z}$ ex C; ſed ſæpius ex A, quam ex A — R. Erg. ſæpius ex A, quam $\frac{D}{Z}$ ex C. Q. E. D. 1°.

Converſa patet, Nam ſi dicatur A : B : : C : D, tunc $\frac{B}{Z}$ & $\frac{D}{Z}$ æque ſæpe auferri poſſunt ex A & C : & ſi dicatur A : B $<$ C : D, Tunc *per* 1 *part.* aliqua $\frac{B}{Z}$ minus ſæpe auferri poteſt ex A, quam $\frac{D}{Z}$ ex C, quorum utrumque eſt contra hyp.

THEOR. 35. E. 31. 5.

* *Si in duobus magnitudinum quaternariis, conſequentes prioris ſint antecedentes poſterioris, habeantque primæ majores rationes ad ſecundas, quam tertiæ ad quartas.* (h. e. *Si* A : $B > G : H$, *&* $B : C > H : L$.) *Tunc* (Ordinate) *prima prioris majorem habebit rationem ad ſecundam poſterioris, quam tertia prioris ad quartam poſterioris.* (h. e. *erit* A : $C > G : L$)

Fiat X : B : : G : H, & B : Z : : H : L, ideo A $>+$ X & Z $>$ C *per* 14 *ax.* & ex æquo *per* 15. erit X : Z : : G : L, ſed (*ut jam*) eſt $Z >$ C; ideoque *per* 13 *ax.* eſt X : C $>$ G : L; ſed (ut jam) eſt A $>$ X, Erg. multo magis *per* 10 *ax.* eſt A : C $>$ G : L. *Q.* E. D.

THEOR. 36. E. 32. 5.

* *Si in duobus magnitudinum quaternariis, mediæ prioris fuerint extremæ poſterioris, habeantque primæ majores rationes ad ſecundas, quam tertiæ ad quartas;* (A : $B > G : H$, *&* B : $C > L : G$) *Tunc* (perturbate) *prima prioris majorem habebit rationem ad ſecundam poſterioris, quam tertia poſterioris ad quartam prioris.* (h. e. *erit* A : $C > L : H$)

dem.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis, ſed pro 15 th. citetur 16.

THEOR. 37.

* *Si in duobus magnitudinum quaternariis eædem fuerint conſequentes, habeantque primæ majores rationes ad ſecundas, quam tertiæ ad quartas*; (A : B > C : D, & E : B > F : D) *Tunc ſumma primarum majorem habebit rationem ad communem ſecundam, quam ſumma tertiarum ad communem quartam.* (h. e. *erit* A + E : B > C + F : D)

Fiat X : B : : C : D, & Z : B : : F : D, tunc erit *per* 17. X + Z : B : : C + F : D; ſed *per* 14 *ax.* eſt A > X & E > Z; Erg. *per* 13 *ax.* eſt A + E : B > C + F : D. Q. E. D.

CAP. 3.

De Magnitudinibus commenſurabilibus & incommenſurabilibus in genere.

THEOR. 38.

2 Fig. *SI duarum magnitudinum* CD *&* AB *ſemper detrahatur minor a majore, quoties fieri poteſt, alterna quadam detractione, & reliqua tandem* GB *præcedentem* FD *metiatur*; *Tunc ipſæ magnitudines ſunt commenſurabiles.*

Ex hyp. GB metitur FD, ideoque ipſam quoque AG quam illa metitur, *per* 17 *ax.* ſed GB etiam metitur ſeipſam, ergo & totam AB, *per* 16 *ax.* & propterea CF quam AB metitur, adeoque & totam ex ijs compoſitam CD; ſed probatum

probatum eſt GB metiri etiam AB, ac proinde GB eſt communis menſura ipſarum CD & AB. Q. E. D.

COR. 1. *Hinc patet inventio maximæ communis menſuræ GB duarum magnitudinum quarumvis commenſurabilium CD & AD: auferendo ſcil. minorem e majore, quoties poteſt, & ſimiliter reliquum FD ex AB; & reliquum GB ex FD, & ſic deinceps, donec nihil reſtiterit.* E. 3. 10.

Patet ex ipſa prop. GB ſic inventam eſſe datarum CD & AB communem menſuram. Item eſſe maximam ſic dem. Si non ſit maxima, dicatur E eſſe etiam iſtarum menſura & major quam GB; Erg. *per* 17 *ax.* metitur CF quam AB metitur; ſed *ex hyp.* metitur etiam CD, Erg. *per* 18 *ax.* & reliquam FD: Erg. & AG quam FD metitur; ſed *ex hyp.* metitur AB, Erg. & reliquam GB, major minorem, Q.E.A.

COR. 2. E. 4. 10. *Hinc magnitudo metiens duas magnitudines, metitur & maximam earum menſuram communem: Ac proinde patet modus inveniendi maximam communem menſuram quotcunque magnitudinum datarum.*

THEOR. 39. E. 2. 10.

Si duarum magnitudinum ſemper detrahatur minor AB a majore CD alternâ detractione, & reliqua præcedentem nuſquam metiatur: Incommenſurabiles erunt ipſæ magnitudines. 2. Fig.

Si fieri poſſit, ſit aliqua E communis menſura. Quoniam igitur AB detracta ex CD quoties poteſt, relinquit FD ſeipſâ minorem *per* 7 *ax.* & FD ex AB relinquit GB, & ſic deniceps, tandem *Lem.* 13. relinquetur aliqua GB $<$ E; Erg. E metiens ablatam AB = CF & totam CD, etiam metitur reliquam FD, proinde & AG quam FD metitur: ſed *ex hyp.* metitur totam AB, Erg. & reliquam GB $<$ E; Q.E.A.

Converſa

CONVERSÆ THEOR. 38 & 39.

* [1] *Si ſit CD* ┐⊔ *AB; Tunc GB metitur FD.*
2. Fig. [2] *Et ſi ſit CD* └┐⊔ *AB; Tunc GB non metitur FD.*

1. Si dicatur GB non metiri FD, tunc *per præc.* erit CD └┐⊔ AB, *contra hyp.*

2. Si dicatur GB metiri FD, tunc *per* 38. erit CD ┐⊔ AB. *contra hyp.*

THEOR. 40. E. 5. & 6. 10.

* *Si magnitudines A, B ſint commenſurabiles; Tunc ſunt inter ſe ut veri numeri, ſeu (quod idem eſt) earum ratio numeris veris exprimi poteſt. Et e contra.*

Ex hyp. eſt A ┐⊔ *B*, & *per* c. 4. eſto ipſarum maximæ communis menſura, quæ dicatur Z : A :: 1 : D numerum, ſeu *inverſe* A : Z :: D : 1 . & *Z* : *B* :: 1 : E numerum. tunc *ex æq. ord.* erit A : *B* :: D : E, numerus ad numerum. Q. E. D.

CONV. *Per* c. 4. Eſto aliqua magnitudo E : A :: 1 : C numerum, atqui ex *hyp.* eſt A : *B* :: C : D, Ideo *ex æquo* erit E : *B* :: 1 : D; Erg. cum 1 metiatur numerum D, etiam E metitur *B*, ſed E *ex hyp.* metitur quoque A. Erg. *per* 22. *def.* eſt A ┐⊔ *B*. Q. E. D.

THEOR. 41. E. 7. & 8. 10.

* *Si magnitudines A, B ſint incommenſurabiles; Tunc non ſunt inter ſe ut veri numeri. Et e contra.*

Nam ſi dicatur eſſe A : *B* :: N : N, tunc *per conv.* 40. eſſet A ┐⊔ *B*. *contra hyp.*

CONV. Si dicatur A ┐⊔ *B*, tunc eſſet A : *B* :: N : N. *per* 40. *contra hyp.*

THEOR.

THEOR. 42. F.10.10.

* *Si quatuor proportionalium* (*C* : *A* :: *B* : D) *Prima ſit commenſurabilis ſecundæ ; Tunc erit tertia commenſurabilis quartæ.* [2]*Et ſi ſit prima incommenſurabilis ſecundæ ; Tunc erit tertia incommenſurabilis quartæ.*

1. *Per* 40. eſt C : A :: N : N, ſed *ex hyp.* eſt C : A :: *B* : D, Erg. *per* 2 *ax.* eſt *B* : D :: N : N, ac proinde *per conv.* 40. eſt *B* ⊤⊔ D.

2. *Per* 41, Non eſt C : A :: N : N. ſed *ex hyp.* eſt C : A :: *B* : D. Erg. *per* 2 *ax.* Non eſt B : D :: N : N, ideoque *per conv.* 41. eſt *B* ⊤⊔ D. Q. E. D.

THEOR. 43. F.12.10.

* *Magnitudines A,* B *eidem C commenſurabiles, ſunt commenſurabiles inter ſe.*

Eſt A : C, item *B* : C :: N : N. *per conv.* 40. qui numeri in priore proportione ſint R & x, & in altera *Z* & R. *h. e.* A : C :: R : X, & C : *B* :: *Z* : R. Erg. *ex æq. perturb. erit* A : *B* :: Z : *X*, ideoque *per conv.* 40. erit A ⊤⊔ *B*. Q. E. D.

THEOR. 44. E.13.10.

* *Si duarum magnitudinum A, B una A ſit eidem C commenſurabilis , altera vero* B *incommenſurabilis : Tunc iſtæ magnitudines A, B ſunt incommenſurabiles inter ſe.*

Si dicatur B ⊤⊔ A, tunc cum *ex hyp.* ſit C ⊤⊔ A, erit *per* 43. C ⊤⊔ B. contra hyp.

THEOR. 45. E.14.10.

* *Si duarum magnitudinum commenſurabilium A, B una A eidem C ſit incommenſurabilis ; Tunc altera B eidem incommenſurabilis erit.*

Si

Si dicatur B ⌐⊔ C, tunc cum ex hyp. ſit *A* ⌐⊔ *B*, erit etiam *per* 43. *A* ⌐⊔ C. contra hyp.

THEOR. 46. E. 16. 10.

* *Duarum commenſurabilium* A, B *ſumma* A + B *utrique ipſarum eſt commenſurabilis. Et e contra. Si ſit* A + *B* ⌐⊔ A; *Erit* A ⌐⊔ *B.*

Eſto D ipſarum communis menſura, Erg. *per* 16 *ax.* D metitur A + B. Erg. *per* 22. *def.* eſt A + B ⌐⊔ A & *B* Q. E. D.

CONV. Eſto D communis menſura ipſarum A + *B* & A, Erg. *per* 18 *ax.* D metitur *B*, ac proinde *per* 22 *d.* eſt A ⌐⊔ B. Q. E D.

COR. *Si duarum magnitudinum ſumma ſit alteri ipſarum commenſurabilis; tunc eadem etiam reliquæ commenſurabilis erit.*

THEOR. 47. E. 17. 10.

* *Duarum incommenſurabilium* A, *B ſumma* A + B *utrique ipſarum eſt incommenſurabilis. Et e contra. Si ſit* A + B ⌐⊔ *A*; *Tunc erit* A ⌐⊔ B.

Si dicatur D communis menſura ipſarum A + B & A, tunc *per* 18 *ax.* D metitur B, Erg. *per* 22. *d.* erit A ⌐⊔ *B.* contra hyp.

CONV. Si dicatur A ⌐⊔ *B*, tunc *per* 46. erit A + B ⌐⊔ A. contra hyp.

COR. *Si duarum magnitudinum ſumma ſit alteri ipſarum incommenſurabilis; tunc reliquæ incommenſurabilis erit.*

THEOR. 48.

* *Numerus ſurdus & verus, ut & magnitudines quæcunque ipſis explicabiles, ſunt inter ſe incommenſurabiles, ac proinde ſemper inæquales.*

dicatur

*D*icatur quævis radix ſurda v. g. $\sqrt{B}$ ⊓⊔ A numero cuicunque vero; tunc *per* 40. erit $\sqrt{B} : A :: N : N$. ſintque hi numeri veri X & Z. Erg. *per* 4. erit $AX = \sqrt{B} \times Z$. Erg. *per* 21. *ax.* erit $A^2 X^2 = B \times Z^2$: ſed *ex hyp* $A^2 X^2$ eſt verus numerus quadratus, Erg. $B \times Z^2$ eſt etiam verus numerus quadratus; ſed numerô quadrato per quadratum diviſo, quotus eſt quadratus, *per* 24. Erg. B erit verus numerus quadratus, *contr. hyp.* Erg. eſt $\sqrt{B}$ ⊓⊔ A. Erg. Magnitudines quæcunque numeris quibuſcunque ſurdo & vero explicabiles, etiam inter ſe ſunt incommenſurabiles; ideoque *per* 41. non numeris veris nedum æqualibus exprimi poteſt earum ratio. Q. E. D.

COR. *Hinc ſequitur, nec ſummam $\sqrt{B} + A$ Nec differentiam $\sqrt{B} - A$ numeri veri & ſurdi, unquam eſſe numero vero D æqualem.*

1. Si dicatur $\sqrt{B} + A = D$, tunc *per* 3. *ax.* eſſet $\sqrt{B} = D - A$; ſed $D - A$ facit numerum verum, *ex hyp.* Erg. eſſet $\sqrt{B}$ æqualis numero vero. Q. E. A.

2. Non eſt $\sqrt{B} - A = D$, alias *per* 3. *ax.* eſſet $\sqrt{B} = D + A$, radix ſurda numero vero Q. E. A.

Poſſe quorundam ſurdorum ſummam eſſe numero vero æqualem, patebit ex 43. 3.

LIB. II.

De Lineis Rectis in Plano eodem.

Hic liber cum ſequentibus ſunt ſtricte Geometrici, eorumque objectum dicitur Extenſum.

Definitiones.

1. SI extenſum fuerit tantummodo longum (ſive rectum fuerit ſive curvum) dicitur Linea: Hujus extrema ſeu termini (ſiquos habet) vocantur Puncta. Si autem ſit longum & latum ſolummodo, (ſive planum fuerit ſive curvum) dicitur Superficies: Hujus termini ſunt lineæ. Si denique ſit longum latum ſimul & profundum, dicitur Corpus ſeu Solidum: Ejuſque termini ſunt Superficies.

2. Superficies & ſolida, quatenus terminantur, vocantur Figuræ: oritur namque figura ex terminatione extenſionis.

3. Figura eſt extenſum ſeu ſpatium uno pluribuſve terminis undique clauſum.

4. Extenſa congruere dicuntur, quæ cum ſibi mutuo applicantur, nihil unius extra alterum cadit.

5. Punctum dicitur Quicquid in extenſo eſt indiviſibile prorſus.

6. Linea recta eſt omnium breviſſima inter eadem puncta; ut B D. Ac proinde ex æquo inter ſua puncta interjacet. h. e. *In ſuo progreſſu a B ad D neque ſiniſtrorſum neque dextrorſum declinat.* Curva non ita; ut B C D, B A C O D, B A O D. *Vid.* 1. *Fig.*

COR. *Hinc patet unam rectam B D eſſe minorem non tantum lineâ ſimpliciter curva B C D, ſed & etiam pluribus*

pluribus ſimul rectis ſibi invicem junctis & inter ejus terminos B & D, non in directum jacentibus B *A C O D aut* B *A O D.*

Nam ex def. Via per rectam BD eſt brevior quavis alia a B ad D tendente; ideoque brevior quam via per lineam ſimpliciter curvam BCD, aut per lineas BAOD, BACOD.

7. Quando recta A B (vid 2. Fig.) alteri A C ſuperimpoſita, ab ea recedit movendo circa alterum ſui terminum A, Iſta duarum rectarum a communi concurſu apertura B A C vocatur Angulus rectilineus; ipſæque rectæ ejus crura. Et curva B C altero termino B deſcripta, dicitur circuli arcus. Et punctum angulare A dicitur iſtius circuli centrum. Et AB aut ejuſmodi recta inter A & curvam, vocatur Radius aut Semidiameter: quæ ſi integram revolutionem compleverit, rurſus cum A C coincidens, punctum B integram deſcribet curvam, quæ circuli Circumferentia, & ſæpe brevitatis cauſa, Circulus nuncupatur; quamvis, ſecundum propriam ſuam acceptionem, vox circulus ipſum ſpatium curvâ contentum ſignificet.

Not. *Crurum A B & A C æqualitas aut inæqualitas, major aut minor longitudo nihil facit ad anguli quantitatem: ſed arcus B C ponitur pro ejus menſura, qui ſi* 40 *gradus v. g. ſeu partes* 360*mas ſuæ circumferentiæ contineat, deſignat B A C eſſe angulum totidem graduum.*

8. Si una recta A B alteri C D inſiſtens in neutram inclinet partem, ideoque angulos ABC, ABD utrinque faciat æquales; uterque iſtorum angulorum dicitur Rectus. Et linea inſiſtens A B Perpendicularis. Angulus recto minor EBC Acutus. Major vero EBD Obtuſus vocatur. vid. 3. fig.

9. Rectæ dicuntur parallelæ, quæ ubique a ſeinvicem æquidiſtant. ut C B, F G.

Quod ad minimam earum diſtantiam, poſtea patebit eſſe penes perpendicularem quæ ab unius parallelarum puncto ad alteram ducitur.

10. Figuræ rectilineæ ſunt quæ ſub lineis rectis continentur, Trilateræ ſeu Triangula ſub tribus: Quadrilateræ ſub quatuor. Multilateræ ſub pluribus.

11. Triangulum æquilaterum eſt quod tria latera habet æqualia. ut A. Iſoſceles, quod duo. ut B. Scalenum, quod omnia habet inæqualia. ut C. vid. 4. Fig.

12. Triangulum rectangulum, eſt quod habet angulum rectum. ut B. Obtuſangulum, quod habet angulum obtuſum. ut C. Acutangulum, quod omnes angulos habet acutos. ut A.

13. Ex quadrilateris, Quadratum eſt, quod eſt rectangulum & æquilaterum. ut G. (vid. 5. fig.) ſoletque etiam dici potentia lineæ ſuper quam deſcribitur. Oblongum ſeu altera parte longius, quod eſt rectangulum ſed non æquilaterum. ut H. Rhombus, qui eſt æquilaterus ſed non rectangulus. ut I. Rhomboides, quæ adverſa latera, & angulos, habens æqualia, nec eſt æquilatera, nec rectangula. ut K. Atque hæc omnia eſſe parallelogramma poſtea patebit, Reliqua quadrilatera vocantur Trapezia. ut L.

14. Parallelogrammum eſt quadrilaterum bina quælibet latera oppoſita habens parallela: quod ſi rectangulum ſit, contineri dicitur ſub duabus rectis contiguis, v. g. ſub *no. ol.* Et ex ductu concipitur produci.

15. Ductus rectæ in rectam eſt motus unius perpendiculariter inſiſtentis alteri.

Not: *Citationes ſic intelliguntur*, 4. 1. *quartum theorema libri primi indicat*; 1. *P.* 4. 1. *primum problema theorematis quarti libri tertij.* 1. *c.* 27. 1. *primum corollarium 27mi th. Lib.* 1. *d. definitionem. ax. axioma.* &c. *AB* || *CD, has lineas eſſe parallelas. rect. angulum rectum. rectg. rectangulum.*

* SCHOL.

A Primis quatuor definitionibus Sequitur 1. Quod ſolidum tres habeat dimenſiones; ſuperficies duas: Linea

Linea unam: Punctus nullam; unde ab *Euclide* appellatur Id (in extenſo ſcil.) cujus nulla eſt pars.

Sequitur 2. Propter eandem ſpatij & extenſi ideam, licere Geometris concipere extenſi ſpecies, harumque figuras ex motu oriri: Lineam nempe ex motu puncti: ſuperficiem ex motu lineæ: ſolidum denique ex motu ſuperficiei. Quæcunque enim ſit ſpatij natura, quævis ejus portio motu tranſcurſa eandem plane dimenſionem habet & figuram cum materia qualibet ipſam implente.

Sequitur 3. Tum ex dimenſionum realitate, tum ex reali corporum contactu, ſuperficiem lineam & punctum eſſe reales extenſi modos ſeu accidentia: punctum nimirum lineæ, utrumque ſuperficiei, omnia vero corporis.

Nam corpora realiter ſe mutuo tangunt, non in profunditate; alias in quolibet contactu partes tangentes ſe mutuo penetrarent. *h. e.* una pars intra alterius terminos contineretur ſecundum omnes ſuas dimenſiones: quod eſt impoſſibile. Erg. ſe mutuo tangunt corpora vel in ſuperficie, vel in linea, vel in puncto tantum: ut ex contactibus corporum ex aliqua parte planorum, rotundæ columnæ & plani, globi & plani manifeſtum eſt. Quod ſi ſcabræ fuerint tangentium ſuperficies, tunc ſecundum multas ſuperficieculas aut lineolas contactus fiet.

Nec dici poteſt, ullum ex prædictis modis ſecundum quem fit contactus, eſſe corporis partem. Nam cum ex def. 4. 1. patet omnem corporis partem eſſe corpus, minus majoris; inde ſequeretur contactum fieri ſecundum omnes corporis dimenſiones, ſeu fieri penetrationem.

Præterea, ſi punctus ſeu linea extremum dicatur lineæ pars; tunc (per 4 d. 1.) erit linea, minor nempe majoris, quæ ſuos item terminos, ſicut ſinguli horum ob eandem rationem ſuos ſimiliter habebunt, & ſic in infinitum. Unde hæc inſuper ſequerentur abſurda. 1. dari extremum extremi, idque in infinitum. 2. Lineam quamvis extremitates habere numero fere infinitas. 3. Nullius lineæ terminum determinari poſſe, cum termini terminus detur in infinitum. 4. Lineam non per totum ſuum terminum termi-

nari, ſed tantum per ejuſdem partem, ſeu chimæram. Sequitur 4. Quotieſcunque aliorum lineæ cujuſvis punctorum, quam duarum ejus extremitatum, fit mentio, intelligere Geometras puncta per deſignationem tantummodo facta; ſive mentis, ut cum concipimus lineam datam in hoc aut illo puncto eſſe diviſibilem: ſive rei materialis illi applicatæ, ut cum norma lineæ tranſverſim applicatur. Ac proinde ejuſmodi punctorum exiſtentia eſt ad ſummum niſi poſſibilis. Verum hæc obiter tantum, quippe ex demonſtrationibus Geometricis indubitata peritis,

AXIOMATA.

1. Extenſa quæ ſibi mutuo congruunt, ſunt inter ſe æqualia. Item anguli.

2. Æquales rectæ lineæ, item æquales anguli rectilinei, ſibi mutuo congruunt.

3. Linea lineam non ſecundum partem, ſed unicum punctum, ſecare poteſt; *alias foret lata.* Item recta rectam non niſi ſemel: *alias foret curva.*

4. Ab uno puncto ad aliud unica recta (ſeu breviſſima) duci poteſt.

5. Omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales.

6, Radij ejuſdem circuli ſunt inter ſe æquales. *vid.* 7. d. *huj.*

7. Recta & curva ſecundum ullam ſui partem non congruunt.

Nam hæc pars inter terminos congruentiæ contenta foret breviſſima & non breviſſima: utpote ex hyp. *tum recta tum curva.*

POSTULATA.

1. Extenſum quodvis hoc vel illo modo moveri concedatur.

2. Quovis centro & quovis intervallo circulum ducere.

3. A dato puncto ad datum punctum rectam ducere.

4. Rectam datam finitam in continuum producere.

5. In recta indefinita (ſeu ut libet continuata) partes quotcunque æquales quâvis circini apertura ſumere.

6. Ad datum punctum rectam ponere alteri datæ æqualem. E. 2. 1.

7. A majore recta minorem auferre alteri datæ æqualem. E. 3. 1.

CAP. I.

De lineis rectis ſe mutuo ſecantibus & angulis inde factis.

QUæ in hoc capite & ſequente de lineis rectis demonſtrantur, iis conveniunt ſimpliciter & abſque reſpectu ad ullas figuras quibus vel termini vel adjuncta eſſe poſſunt. Ubi Not: Theor. 3. & 4. cum prioribus partibus Theor. 30. & 31 concidere, & in iſtis triangula iſoſcelia nominari angulos æquilateros rectis ſubtenſos methodi tantum gratiâ, ne ſimplicium linearum & angulorum Doctrina cum illa triangulorum commiſceatur.

THEOR. 1. E. 14 *ax.* 1.

6. Fig. *Duæ lineæ rectæ ACB, ADB ſpatium non includunt.*

Si includant, neceſſe eſt concurrant in duobus punctis A & B; atque ſic ab A ad B duæ ducuntur rectæ, quod *per* 4. *ax. huj.* eſt abſurdum.

THEOR. 2. E. 10 *ax.* 1.

7. Fig. *Duæ rectæ unum & idem ſegmentum utrique ſibi commune non habent.*

Si dicatur AB eſſe communis pars utriuſque AC, AD, tunc CB, cum *ex hyp.* non coincidat cum *BD*, ei inſiſtet,

atque ſic cum eadem producta ſeu A D angulos conſtituet utrinque D B C, C B A. Erg. linea A C, ſic inflexa in B, non ex æquo interjacet inter A & C, ſeu non eſt recta. quod contr. hyp. *vid. cor.* 1 *d.* 3. *quod ab hoc non pendet.*

THEOR. 3.

8. Fig. *Æquales anguli æquilateri B A C, b a c æqualibus rectis B C, b c ſubtenduntur.*

Poſito latere BA ſuper æqualem b a, ei congruet: & ang. B A C = b a c etiam congruent, *per* 2. *ax. huj.* Erg. A C ſuper ſibi æquale a c cadet; atque ſic B coincidit cum b, & C cum c, Erg. *per* 4. *ax. huj.* B C coincidit cum b c, ideoque *per* 2. *ax.* B C = b c. Q. E. D.

THEOR. 4.

8. Fig. *Anguli æquilateri B A C, b a c qui æqualibus rectis B C, b c ſubtenduntur, ſunt æquales.*

Ductis circulis circa A B & A C, ſi b c ponatur ſuper ſibi æquale B C, ei congruet: Item a cadet in circumferentiam B A O (propter a c = A C) & in circumferentiam N A C (propter a b = A B) Erg. cadet in A, (utpote punctum utrique arcui commune) Unde congruit a b cum A B, & a c cum A C; ideoque ang. A & a. Erg. ang. A = a (ut & ipſa triangula, & reliqui anguli) Q. E. D.

PROBL. 1. *Ad punctum D datæ rectæ DC, angulum CDO*
E. 23. 1. *angulo dato b a c æqualem conſtruere.* Fig. 8.

Anguli dati latera utcunque jungat recta b c, fiatque D C = a b; item centris D & C, & intervallis a c, c b, deſcribantur duo arcus ſeinvicem ſecantes in O, per quod & D ducatur DO, Dico factum. Nam ducta rectâ CO, erunt C D O & b a c anguli æquilateri, æqualibuſque rectis ſubtenſi, *ex conſtr.* ac proinde æquales, *per* 4. Q.E.F.

PROBL. 2. *Angulum datum B A C biſecare.* Fig. 9.
E. 9. 1.

Utcunque

Utcunque fiat A H = A G, centriſque H & G æqualibus intervallis deſcribantur duo arcus ſeinvicem ſecantes in O, unde ducatur recta ad A, Dico factum. Nam ductis HO & G O, patet angulos H A O & G A O eſſe æquilateros æqualibus rectis ſubtenſos, ideoque æquales. Q. E. F.

PROBL. 3. *Rectam finitam A B biſecare & perpendiculariter.*
E. 10. 1. Fig. 10.

Centris A & B, æqualibuſque intervallis deſcribantur duo arcus ſeinvicem ſecantes in C ſupra lineam: ſimiliter alij duo ſecantes ſeinvicem in D infra; dein ducatur C D. Dico factum. Nam ductis præterea C A, CB æqualibus, item D A, D B, inde fiunt anguli A C D, B C D æquilateri æqualibuſque rectis ſubtenſi, qui proinde ſunt æquales. Rurſus ang. A C O, BCO ijdem *ex conſtr.* ſunt æquilateri, & etiam æquales (*ut jam probatum.*) Erg. *per* 3. 2. eſt A O = O B; at OC commune, & *ex conſtr.* AC = BC. Erg. ang. COA = COB, ideoque *per* 8. d. 2. recti. Q. E. F.

PROBL. 4. *In puncto dato O datæ rectæ AB perpendicularem O C erigere.*
E. 11. 1. Fig. 10.

Utrinque fiat OA = OB, centriſque A & B pari intervallo ducantur arcus ſe interſecantes in C, ducta OC erit perpendicularis quæſita. Nam ductis præterea AC, BC, erunt ipſi anguli A O C, B O C, æquilateri æqualibuſque rectis ſubtenſi, *ex conſtr.* ideoque *per* 4. 2. æquales; Erg. *per* 8. d. 2. eſt OC perpendicularis. Q. E. F.

PROBL. 5. *A puncto dato C ad datam rectam A B perpendicularem C O demittere.*
E. 12. 1. Fig. 11.

Centro C ducatur arcus ſecans datam rectam in duobus punctis A & B, unde æqualibus intervallis ducantur duo arcus ſeinvicem ſecantes in D, per quod & C ducatur C D. Dico factum. Nam primo probari poteſt eſſe AO = B O, ut in 3 probl. & inde O C eſſe perpendicularem, ut in 4 probl.

THEOR.

THEOR. 5.

12. Fig. *Perpendicularis C A eſt breviſſima omnium rectarum O A a dato puncto A ad datam rectam OC ducibilium.*

Fiat CB = C A Ducaturque BO, atque ſic æquales anguli OCB, OCA, fiunt æquilateri, ac proinde *per* 3. 2. æqualibus rectis OB, O A ſubtenduntur ſed *per c.* 6. *d. huj.* eſt AB < A O + O B; Erg. *Per* 10. *ax.* 1. CA < O A. Q. E. D.

COR. *Omnes perpendiculares EC, EF, ED quæ parallelas jungunt, ſunt inter ſe æquales.* 13. Fig.

N*am per hoc th.* ſunt breviſſimæ diſtantiæ quæ inter ſingula puncta E, E, E, unius parallelarum & alteram C D (cui dicantur perpendiculares) haberi poſſunt: ſed *per* 9. *d.* 2. hujuſmodi breviſſimæ diſtantiæ ſunt inter ſe æquales.

THEOR. 6. E. 13. & 14. 1.

Summa omnium angulorum ex eadem parte rectæ AB cui altera FO vel plures FO, DO inſiſtunt, æqualis
14. Fig. *eſt duobus rectis. Et e contra, Si ſumma angulorum ex utraque parte inſiſtentis F O æquetur duobus rectis; Tunc lineæ A O, O B unam rectam conſtituent.*

1. *Per.* 4. *p.* 4. Erigatur in O perpendicularis OC, hæc *per* 8. *d.* duos rectos COA, COB faciet; ſed horum ſummæ congruit ſumma omnium angulorum ex eadem parte rectæ AB; Erg. *per* 1. *ax* 2. eſt ei æqualis Q. E. D.

Conv. Si negas, faciant AO, OK unam rectam: Erg. *per* 1. *part* eſt AOF + FOK = 2 rect. ſed *ex hyp.* eſt AOF + FOB = 2 rect. Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt A O F + F O K = A O F + FOB, pars toti, Q. E. A.

COR. *Summa omnium angulorum circa idem punctum O æquatur quatuor rectis.*

THEOR.

THEOR. 7. E. 15. 1.

[1]*Si duæ rectæ ſe mutuo ſecuerint; Tunc anguli ad verticem oppoſiti AOC, DOB erunt æquales.* [2]*Et ſi*
15.Fig. *duæ rectæ AO, OB ad diverſas partes fecerint cum alia recta angulos ad verticem AOC, DOB inter ſe æquales; Tunc erunt iſtæ in directum poſitæ.*

1. Eſt AOC + AOD = DOB + AOD, (quia utraque hæc ſumma *per 6.* eſt æqualis duobus rectis) Erg. communi AOD utrinque ablato, erit *per 3. ax.* 1. AOC = DOB. Q. E. D. 1°.

2. *Ex hyp.* eſt AOC = DOB, Erg. *per 3. ax.* 1. eſt AOC + AOD = DOB + AOD; ſed *per 6. 2.* eſt AOC + AOD = 2 rect. Erg. *per 2. ax.* 1. eſt DOB + AOD = 2 rect. ideoque *per 2 part. 6.* AO & OB jacent in directum, Q. E. D. 2°.

THEOR. 8. E. 29. 1.

Si recta BC duas ſecuerit parallelas AH, LR; Tunc faciet [1] *angulos alternos ABC, BCR inter ſe*
16.Fig *æquales.* [2] *Angulum externum SBH interno oppoſito BCR æqualem.* [3] *Internos ad eaſdem partes HBC, BCR. æquales duobus rectis.*

1. Si BCR dicatur < ABC, tunc aliquis major quam BCR, puta BCN, erit = ABC. Excitatâ igitur perpendiculari in C, & demiſſa perpendiculari B*D* a B ad CR, fiat CN = AB, ducaturque BN; atque ſic *per 3. 2.* erit BN = AC, & *per c. 5. 2.* BD = AC, ideoque *per 2. ax.* 1. *B*N = BD totum parti. Q. E. A. Sive BN dicatur cadere ſuper BD, ſive extra. (Nam ſi cadat ſuper BD, patet eſſe BN > BD. Et ſi extra, patet eſſe BN > BO, ſed *per 5. 2.* eſt B*O* > BD, ideoque *per 9. ax.* 1. BN > BD) Erg. non eſt BCR < ABC. Similiter probari poteſt non eſſe ABC < *B*CR. Erg. eſt ang. ABC = *B*CR. Q. E. D. 1°.

2. Per 7. Eſt *SBH* = *ABC*, & *per* 1. *part. BCR* = *ABC*. Erg. *per 2. ax.* 1. eſt *SBH* = *BCR*. Q. E. D. 2°.

3. Per

3. *Per 6.* eſt ABC + HBC = 2 rect. ſed *per* 1. *part.* eſt ABC = BCR. Erg. eſt HBC + BCR = 2 rect. Q. E. D. 3°.

THEOR. 9. E. 27. & 28. 1.

16. Fig. [1]*Si recta SC ſecans duas rectas A H, LR fecerit angulum alternum ABC alterno BCR:* [2]*Vel externum SBH interno oppoſito BCR æqualem.* [3]*Vel internos ad eaſdem partes HBC. BCR æquales duobus rectis; Tunc iſtæ rectæ AH, LR ſunt parallelæ.*

1. Si non ſit AH || LR, dicatur GD || LR, Tunc *per* 1 *part.* 8. erit BCR = DBC; ſed *ex hyp.* eſt BCR = ABC, ideoque *per* 2. *ax* 1. erit DBC = ABC totum parti. Q.E.A.

2. *Ex hyp.* Eſt SBH = BCR, ſed *per* 7. eſt ABC = SBH. Erg. *per* 2. *ax* 1. eſt ABC = BCR, ideoque *per* 1 *part.* eſt AH || LR. Q. E. D. 2°.

3. *Ex hyp.* eſt HBC + BCR = 2 rect. & *per* 1 *part.* 6. HBC + SBH = 2 rect. Erg. *per* 2 *ax.* 1. HBC + BCR = HBC + SBH, ideoque *per* 3. *ax.* 1. BCR = SBH. Erg. *per* 2. *part.* eſt AH || LR. Q. E. D. 3°.

PROBL. E. 31. 1. *Ad datam rectam L R per datum punctum B parallelam ducere.*

A puncto *B* ad L R ducatur utcunque *BC*, ſuper quam in B *per* 1 *p.* 4. fiat ang. ABC = *BCR*. Dico AH eſſe quæſitam. *per* 1 *part. huj.*

THEOR. 10. E. 30. 1.

18. Fig. *Rectæ A B, E F eidem C D parallelæ, inter ſe ſunt parallelæ.*

Per 8. Eſt ang. GKB = KOD = OLF, ideoque *per* 2 *part.* 9. eſt *AB* || EF. Q. E. D.

THEOR.

THEOR. 11. E. 33. 1.

19. Fig. *Si rectæ AC, BD parallelas æquales AB, CD ad eaſdem partes jungant; Erunt inter ſe æquales & parallelæ.*

Ductâ *BC* erunt A*BC* & *BCD* æquilateri, *ex conſtr.* & etiam æquales, *per* 8. Erg. *per* 3. eſt AC $=$ *BD.* quod eſt Primum. Inſuper alterni AC*B*, *CBD* ſunt æquilateri, æqualibuſque &c. *ex conſtr. & prob.* Erg. *per* 4. ſunt æquales, ideoque *per* 1. *part.* 9. eſt AC || *BD.* Quod eſt 2dum.

THEOR. 12. E. 13. ax. 1.

20. Fig. *Si recta HB ſecans duas rectas HF, BG fecerit angulos internos ad eaſdem partes GHB, HBG duobus rectis minores; Tunc rectæ HF, BG concurrent verſus eam partem quam ſpectant anguli dicti.*

Fiat HC || *BC*, tunc *per* 3. *pt.* 8 erit CH*B* + *HBG* $=$ 2 rect. ideoque CH*B* excedit FH*B* per CHF. Inſuper fiat *BE* $=$ *HB*, unde *per* 4. erit *BHE* $=$ *BEH*; ſed eſt *per* 1 *pt.* 8. CHE $=$ *BEH*; Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt *BHE* $=$ CHE; unde ab ang. *CHB* ablatum eſt dimidium per rectam HE quæ cum *BG* concurrit. Et ſimiliter dimidium a reſiduo CHE per rectam HA, & ab ejus reſiduo CHA ſimiliter auferri poteſt dimidium per ejuſmodi rectam quæ cum *BG* concurrit: atque ſi ſic deinceps fiat, manifeſtum eſt *per* l. 13. 1. tandem relictum iri angulum reſiduum quovis angulo dato v. g. CHG minorem, qui dicatur eſſe CHL: ſed *ex conſtr.* *BG* concurrit cum *HL*, Erg. multo magis cum HF inter HL & ipſam *BG* poſita & verſus eandem partem producta. Q. E. D.

COR. *Hinc patet, Rectas non parallelas HF, BG concurrere, ſi producantur.*

Nam ductâ HC || *BG*, erunt *per* 3. *pt.* 8. *CHB* + *HBG* $=$ 2 rect. ideoque *BHG* + *HBG* $<$ 2 rect. Erg. concurrent HF & *BG.* *per præc.*

SCHOL.

* SCHOL. 21. *Fig.*

THeorema præcedens, licet ab *Euclide* inter axiomata poſitum, & ut tale in demonſtratione 28 *prop.* 1. ab eo uſurpatum, hic demonſtravimus, 1 Quia non eſt per ſe notior propoſitione dicta. 2. Ob illud quod de quibusdam lineis curvis demonſtratur, ſcil. eas ad rectam continuo accedere, nuſquam tamen concurrere: quod credendi anſam præbere poſſit idem duobus rectis contingere poſſe, prout ex ſequenti demonſtratione perperam intellecta a quibuſdam prætenditur Sint ang. $A + B < 2$ rect. atque ſic *per præc.* AC & *BD* non ſunt parallelæ. fiat AC item $BD = \frac{1}{2} AB$, jungaturque CD. Rurſus fiat CE ſicut $DF = \frac{1}{2} CD$, ducaturque EF: hoc quamvis in æternum repetatur, nunquam tamen concurrent AE & BF. Nam ſi dicantur v. g. concurrere immediate poſt ductam LM, & & LN & MO factas æquales $\frac{1}{2}$ LM; tunc LM, LN, MO conſtituerent triangulum cujus duo latera LN & MO forent reliquo LM æqualia, contra 24.th. vel quod idem eſt, unam rectam LM æquari duabus ſimul rectis inter ejus terminos non in directum jacentibus, contra cor. 6. d. huj. Q. E. A. Ut verus hujus argumenti ſcopus pateſiat, Moneo 1. Quod *ex th. præc.* pateat rectas AC & BD tandem concurrere, ut in R, ſi producantur. 2. Rectæ v. g. AC productionem in infinitum fieri ei ſemper addendo lineas ipſi AC aut parti ejus cuilibet æquales: ſeu quod idem eſt, ſemper multiplicando ipſam A C ejuſve partem: unde (*per* 3 *poſt.* 1.) lineam quamvis finitam tandem excedet, & multo magis ipſam AR aut BR.

Inſuper, argumentum demonſtrative quidem concludit rectas AC & BD nunquam concurſuras, ſi lege prædicta augeantur per partes proportionales CE, EG, GI &c. & DF, FH, HK &c. decreſcentes: ſeu hac lege in æternum fieri poſſe hujuſmodi partium proportionalium continuam additionem, quarum nulla poſſibilis multitudo in quovis ſequenti æternitatis ſæculo facta unquam valebit rectas

A c

A C & BD ad concurſum uſquam perducere. Nullatenus autem probat (ut prætenditur) ullas rectas non parallelas, quamvis in ſpatium infinitum productas, non concurrere; ſed tantum eas nunquam concurſuras, ſi prædicta methodo in æternum producantur; quod non tantum fatentur Geometræ, ſed etiam probant rectas AC & BD prædicta methodo ſemper productas, non poſſe extendi in ſpatium infinitum; imo inſuper demonſtrative aſſignant ipſum ſpatium ad quod per ejuſmodi productionem pertingere poſſunt (*ſcil. per* 26. 1.) & quod transgredi nequeunt.

C A P. II.

De Rectarum diverſimode ſectarum Potentijs, alijſque Productis.

22. *Fig.*

QUoties agitur de linearum ductu, commode repræſentantur lineæ per ſimplices literas, ut c d per A, d o per B, & ipſum rectangulum d r per AB, ſicut in multiplicatione. Item A^2 vel A q ſignificat quadratum lineæ A. & q. A + E quadratum ſummæ ex A & E. &c.

THEOR. 13.

22. Fig. *Si recta A in rectam B ducatur; producetur parallelogrammum rectangulum A B ſub ipſis contentum; idque quadratum, ſi in ſe aut ſibi æqualem.*

Per 15. *d. huj.* ſunt ang. d + o = 2 rect. ideoque *per* 3. *pt.* 9. eſt A || r o; ſed ſunt etiam æquales *ex hyp.* Erg. *per* 10. eſt c r = & || o d. ideoque eſt d r ſeu AB pgr. Inſuper propter c r || o d, eſt d + c = 2 rect. & o + r = 2 rect. ſed d & o ſunt recti, Erg. c & r. ideoque eſt *A B* rectang. pgr. *Q. E. D.*

COR.

COR. *Hinc, ex ipſa ſcil. demonſtr. Parallelogrammum*
E.c. 29. 1. *unum habens angulum rectum eſſe rectangulum.*

In gratiam ſequentium relegatur 2 Schol. quod ſequitur poſtulata Lib. 1.

THEOR. 14. E. 1. 2.

[1]Si vel una recta Z vel [2]Omnia ejus ſegmenta ducantur in omnia alterius X ſegmenta C, D
23.Fig. *Tunc omnia ſimul rectangula inde producta æquabuntur toti rectangulo XZ ſub totis X & Z contento.*

1. Z Ducta in $C + D$ producit $CZ + DZ$, & in X producit XZ; ſed eſt $C + D = X$; Erg eſt $CZ + DZ = XZ$. Q. E. D. 1°.

2. Eſt $A + B = Z$, & $C + D = X$; ſed *per* 13. $A + B$ ducta in $C + D$ facit $CA + DA + CB + DB$, & Z in X facit XZ. Erg. eſt $CA + DA + CB + DB = XZ$. Q. E. D. 2°.

SCHOL. 1.

Si partes altitudinis rectanguli AB partibus baſis ſumantur magnitudine æquales; Tunc numerus
22. Fig. *iſtarum v. g. 4, multiplicans numerum harum vel numerum quadratorum ſub baſe & una altitudinis parte contentorum, 5. producet 20, numerum quadratorum æqualium in toto rectangulo contentorum: qui proinde productus indicat quantitatem areæ rectanguli.*

Nam ſingulæ altitudinis partes in baſin ductæ producunt tot quadrata, quot in baſe ſunt partes, v. g. 5. & omnes ſimul ductæ producent quater 5. ſeu 20.

SCHOL. 2.

Cum ex 15. *d.* & *prop. præc. ductus ſit motus, ejuſque effectus ſit magnitudo diverſi generis a magnitudinibus in ſeinvicem ductis: Multiplicatio vero ex* 14. d. & 6, 1. *ſit niſi*

multiplex

multiplex additio, ejusque effectus ſit magnitudo ejuſdem generis cum magnitudinibus multiplicatis; Patet inter ductum & multiplicationem ingens intercedere diſcrimem; licet quantitas figuræ ex ductu ortæ per multiplicationem inveſtigetur.

THEOR. 15. E. 3. 2.

24. Fig. *Si recta linea Z ſecetur utcunque; Tunc rectangulum ſub tota & uno ſegmentorum æquale eſt ſegmentorum retangulo, & prædicti ſegmenti quadrato.* h. e. $ZE = AE + Eq.$

Nam E ducta in $A + E$ vel Z producit $AE + Eq$. quod ideo eſt $= ZE$.

THEOR. 16. E. 2. 2.

24. Fig. *Si recta Z ſecetur utcunque; Quadratum totius æquale erit rectangulis ſub tota & quolibet ſegmentorum.* h. e. $Zq = AZ + EZ$.

Nam eſt $Z = A + E$, Erg. utrumque ductum in Z, producit æqualia, ſcil. Zq. & $AZ + EZ$. Q. E. D.

THEOR. 17. E. 4. 2.

24. Fig. *Si recta Z ſecetur utcunque; Quadratum totius æquale erit ſegmentorum quadratis, & rectangulo bis ſub ſegmentis comprehenſo.* h. e. $Zq. = Aq + Eq + 2AE$.

Nam ex hyp. eſt $Z = A + E$, Erg. quæ per 13. 2. ex utroque in ſeipſum ducto proveniunt ſcil. Zq. & $Aq + Eq + 2AE$, ſunt æqualia inter ſe. Q. E. D.

COR. *Hinc, Quadratum totius eſt quadruplum quadrati ex dimidia.*

COR. E.c. 29. 1. *Hinc, ex ipſa ſcil. demonſtr. Parallelogrammum unum habens angulum rectum eſſe rectangulum.*

In gratiam ſequentium relegatur 2 Schol. quod ſequitur poſtulata Lib. 1.

THEOR. 14. E. 1. 2.

23. Fig. *[1]Si vel una recta Z vel [2]Omnia ejus ſegmenta ducantur in omnia alterius X ſegmenta C, D Tunc omnia ſimul rectangula inde producta æquabuntur toti rectangulo XZ ſub totis X & Z contento.*

1. Z Ducta in C + D producit CZ + DZ, & in X producit XZ; ſed eſt C + *D* = X; Erg eſt CZ + *DZ* = XZ. Q. E. *D.* 1°.

2. Eſt A + *B* = *Z*, & C + D = X; ſed *per* 13. A + B ducta in C + *D* facit CA + DA + CB + DB, & *Z* in X facit XZ. Erg. eſt C A + DA + *CB* + *DB* = X Z. Q. E. *D.* 2°.

SCHOL. 1.

22. Fig. *Si partes altitudinis rectanguli AB partibus baſis ſumantur magnitudine æquales; Tunc numerus iſtarum v. g. 4, multiplicans numerum harum vel numerum quadratorum ſub baſe & una altitudinis parte contentorum, 5. producet 20, numerum quadratorum æqualium in toto rectangulo contentorum: qui proinde productus indicat quantitatem areæ rectanguli.*

Nam ſingulæ altitudinis partes in baſin ductæ producunt tot quadrata, quot in baſe ſunt partes, v. g. 5. & omnes ſimul ductæ producent quater 5. ſeu 25.

SCHOL. 2.

Cum ex 15. *d.* & *prop. præc. ductus ſit motus, ejuſque effectus ſit magnitudo diverſi generis a magnitudinibus in ſemvicem ductis: Multiplicatio vero ex* 14. d. & 6, 1. *ſit niſi*

multiplex

multiplex additio, ejusque effectus ſit magnitudo ejuſdem generis cum magnitudinibus multiplicatis; Patet inter ductum & multiplicationem ingens intercedere diſcrimem; licet quantitas figuræ ex ductu ortæ per multiplicationem inveſtigetur.

THEOR. 15. E. 3. 2.

24. Fig. *Si recta linea Z ſecetur utcunque; Tunc rectangulum ſub tota & uno ſegmentorum æquale eſt ſegmentorum retangulo, & prædicti ſegmenti quadrato.* h. e. $ZE = AE + Eq.$

Nam E ducta in $A + E$ vel Z producit $AE + Eq$, quod ideo eſt $= ZE$.

THEOR. 16. E. 2. 2.

24. Fig. *Si recta Z ſecetur utcunque; Quadratum totius æquale erit rectangulis ſub tota & quolibet ſegmentorum.* h. e. $Zq = AZ + EZ$.

Nam eſt $Z = A + E$, Erg. utrumque ductum in Z, producit æqualia, ſcil. Zq. & $AZ + EZ$. Q. E. D.

THEOR. 17. E. 4. 2.

24. Fig. *Si recta Z ſecetur utcunque; Quadratum totius æquale erit ſegmentorum quadratis, & rectangulo bis ſub ſegmentis comprehenſo.* h. e. $Zq. = Aq + Eq + 2AE$.

Nam ex hyp. eſt $Z = A + E$, Erg. quæ per 13. 2. ex utroque in ſeipſum ducto proveniunt ſcil. Zq. & $Aq + Eq + 2AE$, ſunt æqualia inter ſe. Q. E. D.

COR. *Hinc, Quadratum totius eſt quadruplum quadrati ex dimidia.*

THEOR. 18. E. 7. 2.

24. Fig. *Si recta Z ſecetur utcunque; Quadratum totius cum quadrato unius ſegmentorum, æquale erit bis rectangulo ſub tota & dicto ſegmento, cum reliqui ſegmenti quadrato.* h. e. $Zq + Eq = 2\,ZE + Aq$.

Per 14. Eſt $ZE = AE + Eq$, ideoque; *per.* 1 c. 5. 1. $2\,ZE = 2\,AE + 2\,Eq$: utrique addatur Aq, erit $2\,ZE + Aq = 2\,AE + 2\,Eq + Aq$; ſed *per* 17. eſt $Zq = Aq + Eq + 2\,AE$; ideoque addito utrinque Eq, erit $Zq + Eq = Aq + 2\,Eq + 2\,AE$: *Erg. per* 2. *ax.* 1 eſt $Zq + Eq = 2\,ZE + Aq$. Nam jam probatum eſt $2\,ZE + Aq = Aq + 2\,Eq + 2\,AE$.

THEOR. 19. E. 8. 2.

24. Fig. *Si recta Z ſecetur utcunque; Quadratum compoſitæ ex tota & uno ſegmentorum, æquale erit quater rectangulo ſub tota & dicto ſegmento cum reliqui ſegmenti quadrato.* h. e. $q.\,Z + E = 4\,ZE + Aq$.

$Z + E$ in ſe ductum facit $Zq + Eq + 2\,ZE$; ſed *per* 17. eſt $Zq = Aq + Eq + 2\,AE$. *Erg. per* 2. *ax.* 1. eſt $q.\,Z + E = 2\,ZE + 2\,Eq + 2\,AE + Aq$; ſed eſt $2\,ZE = 2\,AE = ZE + 2\,Eq$, (quia *per* 15. eſt $ZE = AE + Eq$) *Erg. per* 2. *ax.* 1. eſt $q.\,Z + E = 4\,ZE + Aq$.

THEOR. 20. E. 5. 2.

25. Fig. *Si recta ſecetur in æqualia A, E + C & non æqualia Z, C; Quadratum dimidij æquale erit inæqualium ſegmentorum rectanguli cum interſegmenti quadrato.* h. e. $Aq = Zc + Eq$.

Ex hyp. eſt $Z = A + E$, & $C = A - E$, *Erg.* ſi Z ducatur in C, & $A + E$ in $A - E$, tunc producta *per* 13 *th.* 2. & 2. *ſch. Poſtul.* 1. facta ZC & $Aq - Eq$ erunt æqualia:

æqualia: Et ſi utrinque addatur Eq; erit $ZC + Eq = Aq$.

THEOR. 21. F. 9. 2.

25. Fig. *Si recta ſecetur in æqualia & non æqualia; Quadratum dimidij cum interſegmenti quadrato ſubduplum eſt quadratorum ab inæqualibus ſegmentis.* h. e. $Aq + Eq = \frac{1}{2} Eq + \frac{1}{2} Cq$.

Per 17. *Eſt* $Zq = Aq + Eq + 2AE$, & $A - E$ (vel C) in ſe ductum producit $Aq + Eq - 2AE$ vel Cq: iſtis æqualibus addantur hæc æqualia, erit $2Aq + 2E = Zq + Cq$, ideoque $Aq + Eq = \frac{1}{2} Zq + \frac{1}{2} Cq$.

THEOR. 22. E. 6. 2.

26. Fig. *Si recta biſecetur, eique in directum alia E adjiciatur; Quadratum compoſitæ ex dimidia & adjecta, æquale erit rectangulo ſub tota compoſita A + E & adjecta E una cum dimidiæ quadrato.* h. e. $q.\frac{1}{2}A + E = A + E \times E + q.\frac{1}{2}A$

Ex ductu $q.\frac{1}{2}A + E$ eſt $\frac{1}{4}Aq + AE + Eq$, & rectang. ex $A + E$ in E eſt $AE + Eq$, quod cum $\frac{1}{4}Aq$ ſeu $q:\frac{1}{2}A$ facit $AE + Eq + \frac{1}{4}Aq$ (quadratum ex $\frac{1}{2}A + E$) Erg. eſt $q.\frac{1}{2}A + E = A + E \times E + q.\frac{1}{2}A$. Q.E.D.

THEOR. 23. E. 10. 2.

26. Fig. *Si recta A Biſecetur, eique alia adjiciatur E; Quadratum compoſitæ ex dimidia & adjecta ſimul cum quadrato dimidiæ, eſt ſubduplum quadratorum totius compoſitæ & adjectæ.* h. e. $q.\frac{1}{2}A + E + q.\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}q.A + E + \frac{1}{2}Eq$.

Ex ductu quadrata ex $\frac{1}{2}A + E$ & ex $\frac{1}{2}A$ ſimul addita

 faciunt

um ex
ſunt

tur :
later
&
+

jus
ra-

ſo
li-

E
q.
m
+

e-
x-
+

li-

l.

LIB. III.

De Figuris Rectilineis

Definitiones.

1. Figura ordinata eſt quævis figura rectilinea æquilatera & æquiangula. Trigonum v. g. Tetragonum ſeu Quadratum, Pentagonum, Hexagonum &c. a numero angulorum ſic dicta.

2. Altitudo figuræ eſt perpendicularis a vertice ad baſin ducta.

3. Si in parallelogrammo duæ rectæ B E, C D lateribus parallelæ diametrum in eodem puncto ſecantes illud in quatuor parallelogramma diſtribuant; duo per quæ diameter tranſit, dicuntur circa diametrum conſiſtere; reliqua autem B D, C E vocantur complementa: & iſtorum quodlibet ſimul cum hiſce duobus vocatur Gnomon. 1. Fig.

4. Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & angulos ſingulos ſingulis habent æquales, & latera circum æquales angulos directe proportionalia.

5. Reciprocæ figuræ ſunt, quæ latera habent proportionalia reciproce poſita: ſic in 31 *Fig. Lib.* 3. ubi *A* C: C B : : F C : C L.

AXIOMATA.

1. Figuræ rectilineæ quarum latera & anguli, ſingula ſingulis ſunt æqualia, ipſæ ſunt æquales. *Nam ſibi mutuo applicatæ congruunt*

2. Figuræ rectilineæ quæ eidem ſunt ſimiles, ſunt ſimiles inter ſe. *Patet ex* 4 *def. huj. &* 2 *ax.* 1.

CAP. I.

De Rationibus in Triangulo & Parallelogrammo eodem.

RAtio hujus tituli & ſequentium ſimilium eſt hæc, quod quæcunque figurarum affectio demonſtranda proponitur, aut quodcunque ad eam ſupponitur, vel eſt Ratio vel Proportio: atque hic ſive ſupponendæ ſive demonſtrandæ ſint rationes, vel inter latera vel angulos intercedunt.

THEOR. I. E. 20. 1.

2. Fig. *Duo quævis ſimul trianguli latera B A, A C ſunt reliquo B C majora.*

Hoc patet ex 6. *def.* 1. Nam B C *ex hyp.* eſt via omnium breviſſima quibus itur a B ad C. Erg. brevior quam quâ itur in lineis B A, A C.

PROBL. I. E. 22. 1. *Ex tribus datis rectis quibuſcunque quarum duæ quælibet ſunt reliqua majores, triangulum conſtruere.* 2. Fig.

Sint lineæ datæ D. E. F. primo ducatur B C = D, tunc centro C & intervallo rectæ E, item centro B & intervallo rectæ F deſcribantur duo circulorum arcus ſe mutuo ſecantes in A, inde rectis ad B & C ductis, Dico factum.

PROBL. 2 E. 1. 1. *Super datam rectam B C triangulum æquilaterum, & iſoſceles conſtruere.*

Si æquilaterum velis, tunc centris B & C, & intervallo B C ducantur duo arcus ſe invicem ſecantes in A. Quod ſi iſoſceles conſtrueres ſuper B C ex data E, (quæ ſecundum hoc Theor. debet eſſe $> \frac{1}{2}$ B C) Tunc centris B & C, & intervallo rectæ E ducantur duo arcus ſe mutuo ſecantes.

Utriuſque

Utriuſque problematis demonſtratio patet *ex conſtr. &* *6. ax. 2.*

THEOR. 2. E. 32. 1.

3. Fig. [1]*Cujuſvis trianguli A B C angulus externus A C G æqualis eſt duobus ſimul internis oppoſitis A & B.* [2]*Item omnes ſimul interni æquantur duobus rectis.* h. e. A + B + A C B = 2 rect.

1. Fiat E C || A B *per p.* 9. 2. Tunc *per* 8. 2. erit G C E = B externus interno oppoſito, & E C A = A alternus alterno: Erg. totus A C G = A + B, *Quod fuit primum.* Erg. *per.* 3. *ax.* 1. *addito utrinque A C B, eſt A C G* + A C B = A + B + A C B; ſed *per* 6. 2. eſt A C G + A C B = 2 rect. Erg. eſt A + B + A C B = 2 rect.

COR. 1. *Si unus trianguli angulus ſit obtuſus reliqui ſunt acuti.*

COR. 2. *Si unus ſit rectus, reliqui ſunt acuti, ſed ſimul unum rectum faciunt.*

COR. 3. *Si unus angulus A F C ſit duobus reliquis* F *A C, F C A æqualis, tunc erit rectus.* 5. Fig.

Nam ex hyp. eſt A F C = F A C + F C A, & *per* 1. *part. huj.* eſt A F B = F A C + F C A. Erg. eſt A F C = A F B, ideoque uterque rectus, *per* 8 *def.* 2.

COR. 4. *Si unus iſoſcelis angulus fuerit rectus; Reliqui ſunt ſemirecti. Item quilibet æquilateri angulus continet $\frac{2}{3}$ unius recti.*

Facile igitur triſarium ſecatur angulus rectus A F C, ſcil. conſtruendo triangulum æquilaterum ſuper F C aut A F. 5. Fig.

COR. 5. *Si duo anguli unius trianguli duobus alterius æquentur, ſeorſum aut ſimul; etiam tertius tertio æqualis erit. Item ſi unus unius æquetur uni alterius; reliquorum ſummæ æquantur.*

COR. 6. *Summa duorum quorumvis trianguli angulorum a duobus rectis ablata, relinquit tertium.*

COR. 7. 5. Firg. *Si ab uno puncto A ad eandem rectam B C incidant obliqua A C & perpendicularis A F; cadet hæc verſus partes anguli acuti.*

Nam cum angulus perpendicularis cum B C ſit rectus, reliqui anguli quos A F & B C faciunt cum A C intra triangulum, erunt *per* 2. c. acuti; atque ſic A F opponitur acuto.

THEOR. 3.

6. Fig. *Omnis ſimul anguli interni cujuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.* [2]*Item omnes ſimul externi faciunt quatuor.*

Nam figura per rectas a puncto intra ſumpto ductas ad angulos, triangula tot reſolvitur, quot habet latera: Omnia igitur ſimul triangula tot rectos habebunt, quot ſunt latera figuræ: ſed anguli circa dictum punctum, faciunt quatuor rectos. Erg. ſi hos ab omnium triangulorum angulis demas, remanebunt anguli interni ipſius figuræ bis tot rectos conficientes, quot ſunt latera demptis quatuor. *Quod primum.* Sed omnes ſimul interni unâ cum externis conficiunt bis tot rectos quot ſunt latera figuræ. (quilibet quippe internus cum ſuo externo facit duos, *per* 2.2.) Erg. omnes ſimul externi æquantur quatuor rectis. *Quod fuit 2dum.*

THEOR. 4. E. 6. & 5. 1.

4. Fig. [1]*In triangulo X Latera angulis æqualibus oppoſita, inter ſe ſunt æqualia* [2] *Et e contra.* h. e. *ſi B = G, erit A G = A B. Et ſi A G = AB, erit B = G.*

1. Si non ſit A G = A B ſed > A B, tunc fiat A O = A B, atque ſic anguli A B O & A O B erunt æquilateri æqualibuſque rectis ſubtenſi, ac proinde *per* 4. 2. æquales; ſed *per* 2. 3. eſt externus A O B > G uno internorum oppoſitorum: Erg. eſt A B O & multo magis A B G > G, *Quod cont. Hyp.* Erg. eſt A G = A B. Q. E. D. 1°.

2 Et

2. *Ex hyp.* A B & B G ſunt æqualia A G & B G, ideoque B & G ſunt æquilateri æqualibuſque rectis ſubtenſi. Erg. ſunt æquales. Q. E. *D.* 2°.

COR. *Hinc omne triangulum æquiangulam eſt etiam æquilaterum. Et e contra.*

THEOR. 5. E.19.&.18.1.

4. Fig. *In triangulo X latus majori angulo oppoſitum, majus eſt eo quod minori angulo opponitur. Et e contr.* h. e. *ſi B* > A, *erit AG* > *B G. Et ſi AG* > *B G, erit B* > A.

1. Fiat *per* 1 c. 4. 2. A B O = B A O, tunc *per* 1. *part* 4. 3. erit *B* O = A O, & utrinque addito O G, erit *B* O + O G = A G; ſed *per* 1. 3. eſt *B* O + O G > B G. Erg. eſt A G > *B* G. *per* 2. *ax.* 1. Q. E. D. 1°.

2. Si dicatur *B* = A, tunc *per* 1. *part.* 4. 3. erit A *G* = *B* G. Et ſi dicatur *B* < A, tunc erit *per* 1. *part. huj.* A G < *B* G: ſed utrumque eſt *contr. hyp.* Erg. eſt *B* > A: Q. E. D. 2°.

COR. *Hinc & ex* 2. c. 2. 3. *Recta* A *C perpendiculari*
5. Fig. *proprior, eſt remotiore* A D *minor.*

Nam cum F ſit rectus, erunt *per cit. cor.* A D F acutus, item A C F acutus, ideoque A C *D* obtuſus: ac proinde *per* 1. *part. huj.* eſt A D > A C.

* THEOR. 6. E. 21. 1.

Fig. 7. [1]*Si a terminis unius lateris trianguli duæ rectæ B D, CD interius jungantur; Hæ reliquis trianguli lateribus minores erunt.* [2]*Majorem vero angulum B D C comprehendunt.*

Productâ *B D* in E, erit *per* 1. 9. C E + E D > C D & utrinque addito *B D*, erit *B* E + E C > *B D* + D C. Rurſus, eſt *B* A + A E > *B* E, addatur utrinque E C,

erirque

eritque $BA + AC > BE + EC$ *Per* 4. *ax*. 1. Erg. multo magis *per* 9. *ax*. 1. eſt $> BD + DC$. Q. E. D. 1°.

2. *Per* 2. 3. eſt ang. $BCD > DEC > A$. Erg. *per* 9. *ax*. 1. $BDC > A$. Q. E. D. 2°.

THEOR. 7. E. 34. 1.

Fig. 8. [1] *Oppoſita parallelogrammi latera.* [2] *Ut & anguli, æquantur.* [3] *Ipſumque a diametro biſecatur.*

1. Per diametrum dividitur parallelogrammum in duo triangula X, Z, quorum anguli A C B & C B *D* ſunt æquales, item A B C & B C D, *per* 8 2. Erg. totus A C *D* = A B D; Erg. *per* 5. c. 2. 3. reliquus D = A reliquo: Atque ſic oppoſiti anguli ſunt æquales. Q. E. D. 1°.

2. Ponatur triangulum X ſuper *Z*, ita ut ang. A B C ſit ſuper ſibi æqualem B C D, & A C B ſuper ſibi æqualem C B D, qui proinde ſibi mutuo congruent, ut & B *C* ſibi ipſi: Erg. B A cadet ſuper *C D*, & *C A* ſuper *B D*, atque ſic punctum A cadet in utrumque latus *C D*, B D, *Erg.* incidet in D, unicum quippe punctum utrique commune: Atque ſic B A congruit cum *C D*, & *C A* cum B D, Erg. ſunt æqualia. Q. E. *D*. 2°.

3. Omnia Latera, ut & anguli triangulorum X, *Z*, ſingula ſingulis congruunt, (*ut jam prob.*) Erg. *per* 1. *ax*. 3. eſt X = *Z*, ipſumque ideo pgr. A D eſt a diametro biſectum. Q. E. D. 3°.

THEOR. 8.

Omne quadrilaterum rectangulum eſt parallelogrammum.

Patet ex 3. part. 9. 2.

THEOR. 9.

8. Fig. *Omne quadrilaterum AD latera oppoſita habens æqualia, eſt parallelogrammum.*

Ex

Ex hyp. A C *B* & C *B* D ſunt anguli æquilateri, æqualibuſque &c. Ideoque *per* 4. 2. ſunt æquales; ac proinde *per* 1. *part*. 9. 2. eſt A C || B D. ſimiliter probatur eſſe A B || C D. Erg. eſt A D pgr. Q. E. D.

COR. *Hinc omnia quadrilatera regularia ſunt parallelogramma.* vid. 13. *&* 14. def. 2.

PROBL. 1. E. 46. 1. *Parallelogrammum A D conſtruere, datis lateribus contiguis A B, B D. & angulo dato. H.* Fig. 8.

Per 1. *Probl.* 4. 2. Sub datis lateribus A B, B D, fiat ang. A B D = H: item centris A & D, & intervallis B D, A B, deſcribantur duo arcus ſe invicem ſecantes in C, unde ducantur A C, C D. Dico factum. Nam *ex conſtr.* oppoſita latera ſunt æqualia, ac proinde *per* 9. 3. A D eſt pgr.

Si rectangulum velis, tunc ang. B D fiat rectus. Si quadratum, fiat præterea A B = B D, & reliqua ut dictum.

PROBL. 2. *Per punctum datum C expedite ducere parallelam datæ rectæ A B.* Fig. 9.

Centro E in A B utcunque ſumpto, & centro C ad quodvis intervallum ducantur arcus ad F & D: centro item F & invallo C E ducatur arcus priorem arcum ad D ſecans; eritque ducta C D parallela quæſita. Nam *per* 9. 3. C F eſt pgr.

CAP. II.

De rationibus in Triangulis & Parallelogrammis diverſis.

Rationes hic ſive ſupponendæ ſive demonſtrandæ intercedunt vel inter latera, vel angulos, vel areas ſeu ſpatia lateribus contenta.

Theor.

THEOR. 10. E. 4. & 24. 1.

[1] *Si duo triangula X. Z. latus unum A B uni F G, & alterum A C alteri F H, angulumque contentum A angulo contento F habuerint æqualem; Tunc baſes B C, G H quoque habebunt æquales: ut & omnia reliqua inter ſe æqualia.* (h. e. *B* = *G. C* = *H. X* = *Z.*) [2] *Si vero angulus contentus F fuerit angulo contento A major: Tunc baſis G O baſi C B major erit.*

Fig. 10.

Patet. 1 *ex* 3. 2. & 1. *ax* 3. Nam quod hic aſſeritur de baſibus, eſt ipſa propoſitio citata aliter tantum expreſſa.

2. Poſito A B ſuper F G, punctum C vel cadit in lineam G O; atque ſic *per* 1 *ax.* 1. patet eſſe G H ſeu BC < G O. Vel cadit infra; atque ſic ductâ H O, erit ang. G H O > F H O; ſed (propter F H = F O) eſt ang. F O H = F H O; ideoque *per* 2. *ax.* 1. eſt G H O > F O H; & multo magis eſt G H O > G O H. Igitur *per* 5. 3. eſt G O > G H vel B C. Si denique dicatur cadere ſupra G O; tunc *per* 6. 3. erit F O + G O > F H + G H; Erg. *per* 4. *ax.* 1. ablatis utrinque æqualibus F O, F H, erit G O > G H.

THEOR. 11. E. 8. & 25. 1.

1 *Si duo triangula X, Z. latus unum A B uni F G, & alterum A C alteri F H, baſinque B C baſi G H æqualem habuerint: Tunc angulum contentum A angulo contento F æqualem quoque habebunt, ut & omnia reliqua inter ſe æqualia.* 2 *Si autem baſis B C baſi G H major fuerit; Tunc quoque angulus A contentus erit angulo contento F major.*

Fig. 10.

Patet prior pars *ex* 4. 2. & 1. *ax.* 3.

Patet 2da pars. Nam ſi dicatur ang. A = F, tunc *per* 1. *part. præc.* eſſet B C = G H; & ſi dicatur A < G F H; tunc *per* 2. *part. præc.* eſſet B C < G H, *contr. hyp.* Erg. A > G F H.

Theor.

THEOR. 12. E. 26. 1.

Fig. 10. *Si duo triangula X. Z. angulum unum B uni G, & alterum C alteri H, unumque latus uni æquale habuerint, ſive inter æquales exiſtat angulos, ut, B C G H, ſive eorum uni opponatur, ut B A, F G; Tunc omnia reliqua erunt æqualia.*

Sit 1. B C = G H. ponatur B C ſuper G H, tunc (propter B = G & C = H) cadent A B in G F, & C A in H F, atque ſic A cadet in utrumque latus G F, H F; Erg. in F, unicum quippe punctum utrique commune: Erg. latera, ut & anguli, ſibi mutuo congruunt. Erg. eſt B A = G F, C A = H F, A = F, X = Z.

Sit 2. B A = G F. Ex *hyp.* eſt B = G, & C = H, Erg. *per.* 5. c. 2. 3. A = *F*; ſed *ex hyp.* eſt etiam A B = *F* G, & exiſtunt inter æquales *A* & *F*, B & G; Erg. *per.* 1. *part.* reliqua omnia ſunt æqualia.

THEOR. 13.

Fig. 11. *Si duo triangula X. Z. unum latum A B uni E D, & alterum B C alteri E F habuerint æquale, unumque angulum A qui uni laterum æqualium opponitur, uni ſimiliter oppoſito D æqualem, reliquoſque ſimiliter oppoſitos C, F ejuſdem ſpeciei: Tunc omnia reliqua erunt æqualia.*

Si ponatur A B ſuper æquale E D, cadet A C ſuper D*F*, & punctum C ſuper *F*, ideoque omnia latera, item & anguli congruent, ſicque erunt æqualia.

Quod ſi datur C cadere ſupra *F*, tunc propter E C vel B C = E *F*, erit *per* 2. *part.* 4. 3. E *C F* = E *F C*, ac proinde ejuſdem ſpeciei; ſed *ex hyp.* eſt E C D vel C ejuſdem ſpeciei cum E F C; Erg. ſunt D C E, E C *F*, E F C ejuſdem ſpeciei, ſuntque vel recti, obtuſi vel acuti. Non primum aut 2dum; alias in eodem triangulo E C *F* eſſent plures recti aut obtuſi quam unus, *contr.* 1. & 2. c. 2. 3. Non tertium, alias non eſſet E C D + E C F = 2 rect. *contr.* 1 *part.* 6. 2. Erg. C non cadit ſupra *F*. Sed

Sed neque cadit infra *F*, (Nam inde ſimiliter ſequeretur vel E *F C* & E *C F* utrumque eſſe rectum aut obtuſum, vel non eſſe E *F* C + E *F* D = 2 rect.) Erg. punctum C cadit in F. Erg. eſt A C = D *F*, B = E, C = *F*, X = Z.

THEOR. 14. E. 35. 36. 37. & 38. 1.

Fig. 12. *Triangula, & parallelogramma æque alta ſuper eadem vel æquali baſe, ſunt inter ſe æqualia.* (h. e. [1] *Pgr. C F = C H.* [2] *Pgr. C F = B L.* [3] *C A E = C B E.* [4] *C A E = N H L*)

1. *Per* 1. *part.* 7. 3. eſt A *F* = C E = B H; addito *F B*, erit A B = *F H*, ſed & A C = E *F*, & ang. *A* = E *F B*, Erg. *per* 1. *part.* 10. 3. eſt triang. A C B — *F E H*; & utrinque ablato communi *F O* B, & addito communi *C O E*, erit pgr. *C F* = C H, *per* 3. *ax.* 1. Q. *E. D.* 1°.

2. Ut jam prob. eſt pgr. C *F* item pgr. B L = C H Erg. *C F* = *B* L. Q. E. D. 2°.

Patent 3. & 4. Nam triang. C A E & C B E ſunt dimidia parallelogrammorum C F & C H: ſicut C A E & N H L parallelogrammorum C B & B L. Q. E. D. 3°. & 4°.

COR. *Hinc patet, ſi ſit C E > aut < N L; etiam eſſe triang. A C E > aut < N H L.*

PROBL. *Dato rectilineo polygono A B C D E F æquale triangulum L C H conſtruere.* Fig. 14.

Quovis latere A F utrinque producto, ducatur D E cum ſibi parallela E G, *per prob.* 9. 2. ut & D G. Similiter ductâ B G cum ſibi parallela D H, ducatur C H. denique ductâ ſimiliter C A cum ſibi parallela B L, ducatur C L. Dico eſſe triang. L C H = A B C D E F.

Nam eſt triang. D E F = D G F (quippe æque alto ſuper eadem baſe) ſed addito utrinque A B C D F, erit A B C D G = A B C D E F. Eadem ratione eſt G D C = G C H, & addito utrinque *A B C* G, erit A B *C*H = A B C D G. deinque eſt A B C = A L C, ideo utrinque addito A C H, erit L C H = *A* B C H. Sed jam demon-

ſtratum eſt eſſe A B C H = A B C D G = A B C D E F, Erg. eſt L C H = A B C D E F. Q. E. F.

SCHOL. *Fig.* 12.

Hinc, cujuſcunque parallelogrammi *C B H E* invenitur dimenſio, multiplicando ſcil. baſin C E per altitudinem E F. Nam pgr. rect. C F producitur ex F E ducta in C E *per* 13. 2. ejuſque quantitas inveſtigatur multiplicando inter ſe numeros qui exprimunt quantitates linearum E F & C E, *per* 1. *Sch.* 14. 2. ſed probatum eſt eſſe pgr. C H = C F. Sic ſi *F E* ſit 8 ped. & C E 7. erit area pgri 56 ped. quadr.

THEOR. 15. E. 39. & 40. 1.

Fig. 13. *Triangula æqualia A C E, N H L ſuper eadem vel æquali baſe C E, N L ſunt æque alta, ſeu inter eaſdem parallelas.*

Si negas, ſit altera A R || C L, & ducatur N R, Erg. *per præc.* eſt triangl. N R L || C E A, ſed *ex hyp.* eſt N H L = C E A. Erg. N R L = N H L. totum parti. Q. E. A.

THEOR. 16. E. 41. 1.

Fig. 12. *Parallelogrammum eſt duplum trianguli æque alti ſuper eadem vel æquali baſe.* (h. e. *C H* vel *B L* = 2 *C B E*.)

Nam *per* 1. *part.* 14. 13. eſt B L = CH, & *per* 3. *part.* 7. 3. C H = 2 *C B E*.

PROBL. E. 42. 1. *Dato triangulo* A B G *æquale parallelogrammum E F conſtruere in dato angulo D.* Fig. 16.

Per Probl. 9. 2. Duc A G || D C, fac ang. F E C = D, baſin D C biſeca in E, & duc E F = C G. Dico factum. Nam ductâ A E, *ex conſtr.* erit ang. F E C = *D*, & *per* 4. *part.* 14. 3. erit triang. A E C = D A E, ſed *per hoc th.* eſt pgr. E G = 2 A E C vel 2 D A E, Erg. eſt E G = A D C. Q. E. F.

SCHOL.

SCHOL. Fig. 12.

Hinc cujuſcunque trianguli area inveſtigatur; Nam cum area parallelogrammi C H producatur ex altitudine E F in baſin ducta; producetur area trianguli C B E aut N H L, ex altitudine in dimidiam baſin.

THEOR. 17. E. 43. 1.

Fig. 15. *Parallelogrammi B D complementa inter ſe ſunt æqualia.* (h. e. *D G* = *G B*)

Per 7. 3. eſt triang. A D C = A B C, utrinque auferantur triangula æqualia A H G & A E G, item triangula G F C & *G C I per* 7. 3. æqualia, & reſtant pgr. D G = G B. Q. E. D.

PROBL. 1. B. 44. 45. 1. *Ad datam rectam* A *dato triangulo B aut polygono cuivis, æquale parallelogrammum applicare in angulo dato C.* Fig. 15.

Per præc. Probl. Fac pgr. G B = B; ita ut ſit ang. G I B = C, & lateri I G in directum pone G H = A, per H duc A D || E G cui B E producta occurrat in A, per A & G ducatur recta quæ B I productæ occurat in C: per C ducatur C D || H I, cui C *D* occurrant productæ E G & A H in D & F, dico G D eſſe pgr. quæſitum. Nam *ex conſtr.* eſt B = G B, & *per hoc th.* eſt G B = G D, ideo G D = B. Item *ex conſtr.* eſt ang. G I B = *C*, & *per* 2. *part.* 8. 2. eſt ang. D F G = *F C B* = *G I B*, ideoque *per* 2. *ax.* 1. D F G = *C*. Q. E. F.

Si detur polygonum, prius reducatur ad triangulum *per probl.* 14. 3. & reliquum fiat ut ſupra.

PROBL. 2. Fig. 17. *Invenire exceſſum I L quo rectilineum aliquod* A C *ſuperat aliud minus* B A D, *ſive trilatera fuerint, ſive multilatera.*

Per præc. probl. Ad quamvis rectam F G applicentur pgr. F L = A C, & pgr. E H = B A D.

CAP. III.

De Proportionibus in Triangulo & Parallelogrammo eodem.

PRoportiones hic & in ſequentibus capitibus tractandæ intercedunt vel inter latera, vel areas, vel tum inter latera tum areas.

*A*nte ſequentia legatur theor. 25. pars 1. nam probat theor. 18. & non pendet ab hoc capite.

THEOR. 18. E. 2. 6.

1 *Parallela ad trianguli baſin, reliqua latera ſecat proportionaliter. Et e contra.* (h. e. *ſi* F *L* || Fig. 19. *B C, Erit A F : F B :: A L : L C. Et ſi A F : F B :: A L : L C, Erit F L* || *B C*) 2 *Partemque* X *abſcindit toti triangulo ſimilem.*

1. Ductis B L & C F, erit *per* 14. 3. triang. F L B = F L C, ideoque triang. X ad utrumque eandem habet rationem; ſed *per* 25. 3. eſt X : F L B :: A F : F B, & X : L F C :: A L : L C, Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt A F : F B :: A L : L C. Q. E. D. 1°.

Converſa. *Per præc.* eſt A F : F B :: X : F L B, A L : L C :: X : L C F; ſed *ex hyp.* eſt A F : F B :: A L : L C, Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt X : F L B :: X : L C F. ideoque *per* 12. *ax.* 1. eſt F L B = L C F. Erg. *per* 15. 3. eſt F L || B C. Q. E. D.

2. *In fig.* 20. Eſt ang. B communis utrique triang. B H G, B C A, & ſunt G = A, H = C, externi internis. Præterea *per* 25. 3. eſt H C : B H :: A G : B G, Et ductâ H L || A G) H C : B H :: C L : L A. Erg. (*comp.*) eſt H C + B H : B H :: A G + B G : B G, & H C + B H : B H :: C L + L A : L A; h. e. B C : B H :: B A : B G, &

B C :

BC : BH : : C A : L A vel HG. Erg. *per* 4. *def.* 3. triang. B H G & B C A ſunt ſimilia, *Q.* E. D. 20.

PROBL. E. 11. & 12. 6. *Datis duabus rectis tertiam proportionalem invenire. Item tribus datis quartam.* fig. 19.

Quovis angulo B A C deſcripto, fiat A F æqualis primæ datarum, A L = 2dæ, junganturque per F L, fiat etiam F B = 2dæ, ducaturque B C ll F L. Dico L C eſſe tertiam quæſitam : quæ eſt æquivalenter quarta, ſicut ſecunda bis poſita æquivalet duabus.

Si vero quarta quæratur, tunc fiat F B = 3tiæ, & L C erit quarta quæſita. Vel quod idem eſt, fiat A B = 3tiæ, & A *C* erit quarta quæſita.

THEOR. 19.

Si plures ſint baſeos parallelæ; Tunc omnia ſegmenta reliquorum laterum erunt proportionalia.

Hoc patebit, ſi parallela ad F B ducatur per L.

THEOR. 20.

Fig. 21. *Recta B F ab angulo trianguli interius ducta, baſeos parallelas L O, H P ſecat proportionaliter.*

Per 2. *part.* 18. eſt N B : I B : : H N : L I & N P : I O; *&* *permut.* eſt H N : N P : : L I : I O. Q. E. D.

PROBL. E. 9 & 10. 6. [1] *Rectam datam A B in quotcunque partes ſecare ſecundum datas rationes, ſeu ut altera I S ſecta fuerit.* [2] *Item in quotcunque partes æquales.* *Fig.* 22.

Ponantur linea data A *B*, & ſecta I *S* in ſitu parallelo, harumque minor ſit ſupra. Dein per earum terminos ducantur duæ rectæ concurrentes in C, unde per L & R ducantur C K & C H. Dico factum.

2. Si triſecanda ſit A *B*, indefinite ducatur ei parallela I S in qua eâdem circini apertura ſumantur tres partes I L, L R, R S, quæ ſimul excedant A *B*, ſi ſit infra; deficiant

ficiant vero, ſi ſupra: denique per A & I, *B* & S, ducantur duæ rectæ: reliquum ut ſupra.

Utrumque patet ex theor.

* THEOR. 21. E. 3. 6.

Fig. 23. *Si recta B F angulum trianguli biſecuerit; Etiam baſin ſecabit in ratione reliquorum laterum. Et è contra.* (h. e. *ſi ſit ang.* $q = I$, *erit* $AF : FC :: AB : BC$. *Et ſi* $AF : FC :: AB : BC$, *erit ang.* $q = I$)

Producatur C*B*, donec ſit $BL = BA$, jungaturque AL. Quoniam in triang. *Z.* eſt $BL = BA$, erit *per* 2. *part.* 4. 3. ang. $O = L$; ſed *per* 2. 3. eſt $ABC = L + O$, ideoque eſt ang. I. (vel $\frac{1}{2}$ *ABC*) $= L$; Erg. *per* 2. *part.* 9. 2. eſt $BF \parallel AL$. Erg. *per* 18. 3. in triang. ACL eſt $CF : FA :: CB : BL$ vel *BA*. Q. E. D.

2. *Ex hyp.* eſt $AF : FC :: BL$ vel $AB : BC$, ideoque *per* 18. 3. $FB \parallel AL$: Erg. *per* 8. 2. eſt ang. $I = L$ vel $O = Q$, ideo eſt ang. $I = Q$. Q. E. D.

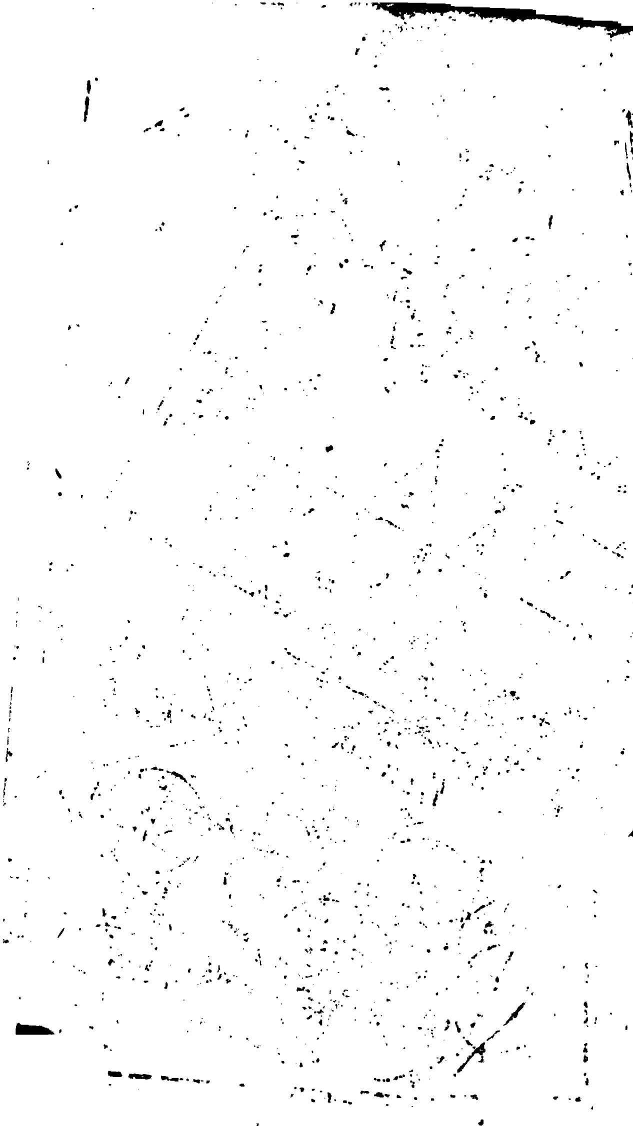
THEOR. 22. E. 8. 6.

Fig. 24. *In triangulo rectangulo perpendicularis AV ab angulo recto ad baſin ducta, triangulum ſecat in partes R & L toti ABC & inter ſe ſimiles.*

Factis $CD = BA$, & ang. C*B*D recto; In triang. R & toto, eſt ang. $V = A$, & *B* communis utrique, ideoque $I = C$, 3tius 3tio. Unde cum ſit $C = I$, $b = V$, & *ex conſtr.* $DC = AB$, erit *per* 12. 3. triang. $BCD = R$ ſed *per* 2. part 18. 3. eſt triang. *B*CD ſimile toti. Erg. R ſimile toti. Similiter probatur L eſſe ſimile toti, (transferendo A*B* à C verſus A) *h. e.* R, L, & A*B*C ſunt ſimilia. Q. E. D.

COR. I. *Perpendicularis AV. eſt media proportionalis inter baſis ſegmenta.* (h. e. $BV : VA :: VA : VC$)

Nam R & L ſunt ſimilia.



eſt me-
im ſibi
C. &

ediam
25.
icir-
cir-
ctis
ng.
B,
C F
c.

di-

c
ſ-
ca
e
a
X
F
lz
in

s

n

Nam ex natura inſtrumenti, triang. Y D C eſt rectangulum ad C, ſicut *YDE* ad *D*: C B eſt perpendicularis ad baſin *YD*, ſicut *D* C eſt ad baſin *YE*. Erg. *per* 2 c. *uj.* eſt *YB* : *YC* : : *YC* : *YD* :: *YD* : *YE*.

Si inter *YB* & *YG* petantur quatuor mediæ; aperi regulas, donec normæ quintæ latus *FG* tranſeat per G: erunt *YC*, *YD*, *YE*, *YF*, quatuor mediæ quæſitæ, ob eandem rationem quæ prius. Hac methodo quotlibet inveniri poſſunt.

SCHOL.

EX *Probl.* 19. 3. & 14. 16. *def.* 1. Patet inventionem lineæ quartæ tribus datis proportionalis, aut tertiæ duabus datis, eſſe multiplicationem lineæ per lineam, ſi prima vicem gerat unitatis; eſſe vero diviſionem, ſi tertia vicem gerat unitatis. Item ex ultim. *Probl.* & 8. *def.* 1. Inventionem unius mediæ proportionalis eſſe extractionem radicis é linea recta. Inventionem primæ duarum mediarum eſſe extractionem radicis cubicæ. Et inventionem primæ trium eſſe extractionem radicis quadrato quadraticæ ſeu quartanæ, & ſic deinceps.

Nam poſitâ ſemper unitate pro valore numerico lineæ *YB* (*vid.* 6. *Fig.*) & quovis numero *v. g.* 3. pro valore lineæ *YC*; tunc 1. 3. & poteſtates ordine ſequentes hujus 3. ſcil. 1. 3. 3q. 3qq. &c. Seu 1. 3. 9. 27. 81. &c. (utpote continue proportionales ſicut ipſæ lineæ, & habentes 3. pro radice) ſunt valores linearum Y B, Y C, &c. unde Y C eſt radix quadrata lineæ Y D, cubica lineæ Y E, quartana lineæ Y F. &c. cum 3 valor lineæ Y C ſit ejuſmodi radix reſpectu numerorum 9. 27. 81. &c. qui ſunt valores linearum Y D, Y E, Y F. &c.

Hinc & *cor.* 22. 1. inter duos numeros A & *Z* inveniuntur $\sqrt{}$ *Z A* unus medius proportionalis, $\sqrt{}$ q. *Z* A^2 primus duorum, $\sqrt{}$ c. Z A^3 primus trium, &c. Nam in continue proportionalibus eſt primus A : *Z* ultimum :: A^2 : $\frac{ZA^2}{A}$ vel *Z* A quadratum ſecundi; & A : *Z* :: A^3 : $\frac{ZA^3}{A}$ vel *Z* A cubum ſecundi. &c.

Præcedentem Problematis ſolutionem non vereor dicere Geometricam; cum nec tentando, nec abſque demonſtrationis rigore fiat. Nec obſtat, quod organum quò perficitur circinô & regula (quibus circuli & lineæ rectæ ducuntur) ſit mage compoſitum, ideoque non tam exactum; quandoquidem ob hanc rationem ſolutio hujuſmodi potius repudianda foret è Mechanica illiberali, ubi tantum deſideratur accurata operis convenientia quæ à manu proficiſcitur, quam é Geometria ubi ſolum ſpectatur exacta ratiocinatio: ut de organicis ſectionum Conicarum deſcriptionibus loquitur ipſe Carteſius.

Modus quo Plato duas medias inveſtigavit, eſt quidem ſuccinctus, ſed non Geometricus; tentando quippe perficitur, eſtque hic. *Fig.* 27.

Duæ datæ A B, B C, ponantur ad angulum rectum, & producantur infinite verſus X & Z: dein unius normæ ang. *D* ita applicetur rectæ B X, ut & latus unum tranſeat per A, & etiam ad punctum E in quo latus alterum ſecat rectam B *Z*, applicata norma ſecunda tranſeat per C. dico B *D* & B E eſſe medias quæſitas. Nam (*ex* 1. *cor. huj. th.* eſt A B : B D : : B D : B E. & ſimiliter B *D* : B *E* : : B E : B *C*.

THEOR. 23. E. 24. 6.

Fig. 28. *In omni parallelogrammo A K, Quæ circa diametrum exiſtunt parallelogramma Z. X; ſunt toti & inter ſe ſimilia.*

In pgr. Z & A K, eſt ang. C B G = A, & C H G = K *per* 8. 2. & B G H = C = E *per* 7. 3. Sic pgr. Z & A K ſunt æquiangula.

Inſuper propter B *G* || A E, ſunt *per* 2 *part.* 18. 3. triang. C B G & C A E ſimilia; *h. e.* C B : B G : : C A : A E; ſed hæc ſunt unica latera, circum æquales angules B & A pgrorum Z & A K, reliquiſque ſimilia. Erg. *per* 4. *def.* 3. ſunt Z & A K ſimilia. Similiter oſtenditur eſſe X & A K ſimilia. Erg. eſt X ſimile Z. *Q.* E D.

THEOR.

THEOR. 24. E. 26. 6.

Fig. 29. *Parallelogramma ſimilia E G, D B habentia angulum communem A, exiſtunt circa eandem diametrum A C.*

Si negas, eſto A H C communis diameter ſecans E F in H, & ducatur H I || A E; unde pgr. E I, D B *per præc.* erunt ſimilia: Erg. *per* 4. *def.* 3. Erit A E : E H :: A D : D C : ſed *ex hyp.* eſt A D: D C :: A E : E F. Erg. *per.* 2. *ax.* 1. eſt A E: E H : : A E : E F. Erg. *per* 12. *ax.* 1. eſt E H = E F, pars toti, Q. E. A.

CAP. IV.

De Proportionibus in Triangulis & Parallelogrammis diverſis, alijſque Rectilineis.

THEOR. 25. E. 1. 6.

Fig. 18. Fig. 30. 1 *Triangula,* 2 *Item Parallelogramma æque alta, ſunt inter ſe ut baſes. Et ſi baſes B C, E F ſint æquales, ipſa triangula erunt ut altitudines A I, D K.*

1. Per continuam bipartitionem dividatur baſis E F in quotcunque partes æquales, v. g. in 4, & una ex hiſce ſumatur in B E, quoties poteſt, v. g. ter; ductis lineis D I, D H, &c. Patet omnia parva triangula, præter A K B, eſſe *per* 14. 3 æqualia, æque ac ipſorum baſes ex conſtr. Erg. triang. D F I & F I (ſimiles aliquotæ conſequentium D F E & F E) æque ſæpe ſemper auferri poſſunt ab antecedentibus A B E, B E. Erg. *per* 13. 1. eſt A B E : D F E : : B E : F B. Q. E. D. 1o.

Patet 2. Nam pgra ſunt triangulorum dupla.

CONV.

CONV. Ductis perpendicularibus A I, D K, fiat I G = B C, & K O = E F, ducanturque A G, O D. Si in his triang. A I G, D K O, ponantur A I, D K, pro baſibus, erunt I G, K O, altitudines, & quidem *ex conſtr.* æquales; ac proinde ſunt triang. A I G, D K O, inter ſe ut A I, D K, *per* 1. *part. huj.* ſed triang. B A C, D E F, ſunt iſtis equalia, *per* 14. 3. Erg. ſunt inter ſe ut A I & D K. Q. E. D.

THEOR. 26. E. 4. 6.

Fig. 20. *Triangula æquiangula O F I, B C A ſunt ſimilia, ſeu Inſuper habent latera circum æquales angulos proportionalia.* (h. e. *O F* : *F I* :: *B C* : *C A. &c.*) *Et homologa ſunt latera O F, B C &c. æqualibus angulis* I *&* *A oppoſita.*

Fiat B H = O F, & B G = O I, & duc H G; ſic *per* 10. 3. erit triang O F I = B G H in omnibus, unde ang. I vel B G H = A, externus interno, ideoque *per* 9. 2. G H ∥ C A, Erg. *per* 2. *part.* 18. 3. triang. B H G = O F I eſt ſimile triangulo B C A. Q. E. D.

* THEOR. 27. E. 5. 6.

Fig. 20. *Si triangula O F I, B C A omnia latera, ſingula ſingulis, habeant proportionalia; Tunc ſunt æquiangula.*

Fiat B H = O F, & H G ∥ A C, erit *per* 2. *part* 18. 3. C B : H B vel O F :: A B : B G & A B : I O Erg. *per* 12. *ax.* 1. eſt G B = O I. ſimiliter probabitur eſſe G H = F I. Erg. ſunt O F I & B H G æquiangula *per* 11. 3. ſed (*per* 2. *part* 18. 3.) eſt B G H ſimile B C A, Erg. & B C A, O F I ſunt æquiangula. Q. E. D.

THEOR. 28. E. 6. 6.

Fig. 20. *Si triangula duo latera O F, F I duobus lateribus C B, A B circum æquales angulos habeant proportionalia; Tunc ſunt æquiangula & ſimilia.*

Fiat B H = O F & B G = O I, inde *per* 10. 3. in omnibus

bus erit O F I = B G H: ſed *ex hyp.* eſt B C : O F vel B H: : B A : O I vel B G, Erg. *per* 1. *part.* 18. 3. eſt H G || C A, ideoque *per* 2. *part.* 18. 3. eſt triang. B H G vel huic in omnibus æquale O F I, ſimile toti B C A. Q. E. D.

* THEOR. 29. E. 7. 6.

Fig. 20. *Si triangula duo latera B C, B A duobus lateribus O F, O I proportionalia habeant, & angulorum iis oppoſitorum unum* I *uni A æqualem, alterum vero* F *cum altero C ejuſdem ſpeciei; Tunc ſunt æquiangula.*

Fiat B H = O F, & B G = O I, & H G B = I. tunc propter I = G = A, erit *per* 9. 2. H G || A C, ideoque *per* 2. *part.* 18. 3. *& hyp.* eſt A B : B G *vel* O I : : B C : H B & *B* C : O F; Erg. *per* 12. *ax.* 1. eſt H *B* = O F, & *ex hyp.* C vel *B H G* ejuſdem ſpeciei cum *F*, &, (ut ante) *B G* = O I, G = I; ideoque *per* 13 3. in omnibus eſt triang. *O F I* = *B G H*; ſed, propter H G || A C, eſt triang. *B G H* æquiangulum toti *B C A*, Erg. *per* 2 *ax.* 1. ſunt O *F I* & *B A C* æquiangula.

THEOR. 30. E. 14. & 15. 6.

Fig. 31. *Triangula & parallelogramma æqualia* X. Z *unum angulum* A C L *uni* B C F *æqualem habentia, etiam latera circum æquales angulos habent reciproca.* (h. e. *A C : C B : : F C : C L*) *Et è contra.*

Poſitis L C & C *F* in directum, conſtituent etiam A C & C B unam rectam, *per* 7. 2. ducta *L B* & productis *H L*, *G B* uſque ad K, ſic de triang. & pgr. ſimul.

Dem. 1. *Ex hyp.* eſt X = Z, ideo *per* 11. *ax.* 1. eſt X : R : : Z : R; ſed *per* 25. 3. X : R : : *A C* : *C B*, & Z : R : : *F C* : C L. Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt A C : C *B* : : *F C* : C L. Q. E. D.

Conv. Per 25. 3. Eſt A C : C *B* : : *X* : *R*, & *F C* : C L : : *Z* : R; ſed *ex hyp.* eſt A C : *C B* : : *F C* : C L. Erg.

Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt X : R :: *Z* : R, ideoque *per* 12. *ax.* 1. eſt X = Z. Q. E. D.

THEOR. 31. E. 23. 6.

Fig. 31. *Triangula & parallelogramma unum angulum uni æqualem habentia, inter ſe rationem habent compoſitam ex rationibus laterum circa angulum æqualem.* (h. e. *ratio X*: Z = *A C* : *C B* × *L C* : *C F*)

Latera circum æquales angulos C ſibi in directum ſtatuantur, & compleatur triang. aut pgr. quo facto, ſic

Dem. In tribus X. R. Z. *per* 22. 1. eſt rat. X : Z = X : R × R : Z; ſed *per* 25. 3. eſt X : R = A C : C B, & R : Z = C L : C F, Erg. eſt X : Z = A C : C B × C L : C F. *per* 2. *ax.* 1. Q. E. D.

COR. *Ejuſmodi triangula & pgra habent inter ſe rationem compoſitam ex rationibus baſis ad baſin, & altitudinis ad altitudinem.*

PROBL. *Invenire rationem inter duo quævis triangula aut pgra.*

Primo reducantur ad rectangula, v. g. X & Z, fiatque *per prob.* 18. 3. C L : C F :: C B : O, unde *per præc.* erit rectg. ſub C L & O = Z; ſed *per* 25. 3. eſt X : C L × O :: A C : O, Erg. eſt X : Z :: A C : O. Q. E. F.

THEOR. 32. E. 20. 6.

Fig. 32. *Similia polygona B D & G I in æque multa triangula ſimilia dividi poſſunt.*

Ex hyp. eſt ang. B = G, & A B : F G :: B C : G H, Erg. P & S *per* 28. 3. Sunt ſimilia. Similiter R & V. Item propter C = H, & B C A = G H F (*ut jam prob.*) eſt ang. A C D = F H I, ſimiliter C D A = H I F, ideoque 3tius 3tio; Erg. *per* 26. 3. Q. & T ſunt etiam ſimilia. Q. E. D.

PROBL.

PROBL. E. 18. 6. *Super datam rectam HI dato rectilineo* BD *ſimile ſimiliterque poſitum rectilineum GI deſcribere.*

*D*atum B D reſolve in triangula, ad H fiant duo anguli æquales angulis ad C; ſimiliter ad I: denique ſuper *FH* & *FI* duo anguli ad *F* æquales ang. E A D & B A C. Dico factum. Nam *ex conſtr.* ſingula triangula unius ſunt ſingulis alterius æquiangula, ideoque *per* 26. 3. ſimilia, ac proinde ſunt toti anguli totis angulis æquales. Erg. *per* 4. *def.* 3. ſunt B *D* & GI ſimilia. Q. E. *F.*

THEOR. 33. E. 19. & 20. 6.

Fig. 33. Fig. 32. *Similia rectilinea ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.* (h. e. X : *Z* = B *C* : *EF bis.* *Et* *BD* : *GI* = *AB* : *FG bis*)

De triangulis ſic. *Per probl.* 18. 3. fiat B C : E *F* :: E *F* : B *G*, & duc A G. Tunc quia *ex hyp.* A B : D E :: B C : E *F*, & B C : E *F* :: E *F* : *B* G, ideo *per* 2 *ax.* 1. A B : *D* *E* :: E *F* : B G; ſed eſt B = E, Erg. *per* 30. 3. eſt Y = *Z*. Inſuper *per* 25. 3. eſt X : Y :: B C : B *G*, & *per* c. 22. 1. eſt B C : B G = *B C*: E F bis; *Erg.* eſt X : *Z* = B *C* : *E F* bis. *per* 2. *ax.* 1. Q. E. D. 1°.

De polyg. *Per præc.* Sunt P & S ſimilia, ideo (*ut jam dem.*) eſt P : S = A B : F G bis. ſimiliter de cæteris triangulis; *Erg.* totum BD : GI = A B : F G bis. Q. E. D. 2°.

* **COR.** *Triangula in quæ ſimilia reſolvuntur polygona, ſunt totis proportionalia.*

Probatum eſt eſſe P : S, Item Q : T, & R : V = A B : F G bis; Erg. eſt P : S :: Q : T :: R : V, *Erg.* *per* 8. 1. eſt P + Q + R : S + T + V :: P : S.

C AP.

CAP. V.

De Potentijs laterum trianguli & linearum Proportionalium, ubi de linea ſecundum extremam & mediam rationem ſecta.

§ I. *De Potentijs Linearum Proportionalium.*

Poteſt Lemma ſequens admitti a tyrone.

* LEMMA.

Fig. 32. *Si ſuper æquales rectas A B, F G ſimilia rectilinea ſimiliter deſcribantur* B D, G I: *Erunt hæc inter ſe æqualia. Et è contra, ſi ſit B D = G I ſimili, erit* A B = *F G.*

Ex hyp. Sunt B D & G I ſimilia, Erg. *per* 32. 3. P & S ſunt ſimilia; ſed *ex hyp.* eſt A B = F G, Erg. *per* 12. 3. erit P = S; ſed *per cor.* 33. 3. eſt P : S :: B D : G I. Erg. eſt *B* D = G I. Q. E. *D.*

CONV. *Ex hyp.* Sunt B D & G I ſimilia & æqualia, ſimiliterque poſita ſuper A *B* & F G, Erg. *per* 32. & *c.* 33. 3. ſunt P & S ſimilia & æqualia. Inſuper ſi ponatur ang. *B* ſuper æqualem *G*, tunc propter A C B = F H G aut C = H, jacebit A C ∥ F H, *per* 9. 2; ſed non cadet A C extra F H; alias eſſet P > vel < S, contra jam probatum; Erg. cadet ſuper F H, atque ſic cadet A in *F*; ſed poſitum fuit *B* in G: Erg. A B = *F G.* Q. *E. D.*

THEOR.

THEOR. 34. E. 16. & 17. 6.

Fig. 31. *Si quatuor rectæ, aut tres, fuerint proportionales; Tunc rectangulum ſub extremis æquale erit rectangulo ſub duabus medijs, aut quadrato unius. Et è contra.* (h. e. *ſi ſit* AC : CB :: CF : CL, *erit* X = Z. *Et ſi ſit* X = Z, *erit* AC : CB :: CF : CL.)

Utrumque patet ex 30. 6. & hoc notando, quod ſcil. trium proportionalium media æquivaleat duabus æqualibus pariterque quadratum illius harum rectangulo.

PROBL. *Cuivis rectilineo quadratum conſtruere æquale.* E. 14. 2.

1°. *Per Probl.* 14. reducito rectilineum propoſitum ad triangulum ſibi æquale;

2°. *Per Probl.* 16. 3. Hoc triangulum reducito ad æquale rectangulum: denique *per* 1. *probl.* 22. inveniatur media proportionalis inter hujus rectanguli latera; Nam hæc media *per* 1. *part. huj.* erit latus quadrati quæſiti.

THEOR. 35. E. cor. 20. 6.

Fig. 33. *Si tres rectæ fuerint proportionales; Tunc ut eſt prima ad tertiam, ita rectilineum ſuper primam ad ſimile ſimiliterque poſitum ſuper ſecundam; Vel ita rectilineum ſuper ſecundam ad ſimile ſimiliterque poſitum ſuper tertiam. Et è contra.*

Patet ex 33. 6. & c. 22. 1. Ibi enim probatur Y = Z, & *X* : Y vel Z = BC : BG, & BC : *B* G = BG : EF bis.

Patet Conv. dicatur enim eſſe BC : EF :: *EF* : BO, tunc *per* 1. *part.* erit BC : BO :: X : Z *Quod cont. hyp.*

PROBL. 1. *Augere vel minuere rectilineum quodvis in ratione data.*

Fig. 32.

Ut ſi velis pentagonum pentagoni CE quintuplum; inter

inter A B & 5 A B inveni mediam proportionalem, & pentagonum ſuper hanc, *per hoc th.* erit dati quintuplum.

PROBL. 2. *Invenire rationem inter duo quævis rectilinea.*

Hoc fit inveniendo tertiam eorum lateribus homologis proportionalem; nam ratio lateris primi ad tertiam eſt ratio quæſita.

PROBL. 3. *Rectilineum conſtituere æquale rectilineo dato*
E 25. 6. *A & ſimile alteri dato F* Fig. 34.

Per 1. *Probl.* 17. Super C *H* fac rectang. Q = *F*, & ſuper *HS* fac rect. R = A : Inter *C H* & *H I* inveni mediam proport. *H O per* 1. *probl.* 22. ſuper hanc, *per probl.* 32. deſcribe rectilineum ſimile dato *F*. Dico factum.

Nam *ex conſtr.* eſt *CH* : *HO* : : *HO* : I, Erg. *per hoc th.* eſt *F*: ſimile ſuper *HO* : : *C H* : *H I*, vel Q : R; igitur *permut.* eſt *F*: Q : : polyg. ſuper *HO*: R; ſed *ex conſt.* eſt F = Q. Erg. eſt ſimile polyg. ſuper *H*O = R vel A. Q. *E.* F.

THEOR. 36. E. 22. 6.

Fig. 36. 1 *Si quatuor aut plures rectæ fuerint proportionales; Tunc ſimilia rectilinea ſuper eas ſimiliter deſcripta, proportionalia erunt. Et è contra.* (h. e. *ſi AB* : *CD* : : *E* F : *G H*, *erit Q* : *R* : : *X* : *Z*. *Et ſi Q* : *R* : : *X* : *Z. erit AB* : C D : : *E* F : *G H.*)

Per 33. 3. *Eſt rat. Q* : *R* = *A* B : C D bis, & *X* : *Z* = E F : G *H* bis; ſed *ex hyp.* eſt AB : CD = E F : G *H*. Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt rat. Q : R = X : *Z*. Q. E. D.

CONV. *Per* 33. 3. Eſt Q : R = A B : C D bis, & X : Z = E F : G *H* bis; Erg. *Per* 2. *c.* 21. 1. *&* 2. *ax.* 1. eſt A B: C D = E F : *G H.* Q. E. D.

* *Ex* 1. *c.* 22. 3. *& præc. &* 34. 3. & 11. *ax.* 1. *Sequitur*, *Si recta A* B *ſecetur utcunque in* C, *tunc*
COR. *fore* A C q. *rect.* A C B. C B q. ∺. *Item ex* 2. *c.*
Herig. 22. 3. *& præc. &* 34. 3. *&* 11. *ax.* 1. *fore A* B q.
Fig. 25. B A C, A D q. ∺. *Item* A B q, A B C, B C q. ∺.

2. De

§. 2. De Potentijs Laterum Trianguli.

THEOR. 37. E. 31. 6.

Fig. 34. *In triangulo rectangulo Z rectilineum ſuper latus angulum rectum ſubtendens, æquale eſt rectilineis ſimilibus ſuper comprehendentia ſimiliter deſcriptis. Et è contra.* (h. e. *ſi ang. A rect. Eſt rectg. ſuper* B D = *rectg. A B + rectg. A D. Et ſi ſit rectg.* B D = *rectg. A* B + *rectg. A D, erit A rect.*)

1. *Per* 2. *c.* 22. Sunt H D. A D. B D ∺, Item H B. B A. B D ∺, Erg. *per* 35. 3. eſt H D : B D :: rectg. A D : rectg. B D, & H B : B D :: rect. A B : rect. B D. Erg. *per* 17. 1. eſt H D + B *H* : *B* D : : rectg. A *D* + rectg. A B : rectg. B D, ſed eſt B D = *H D* + B *H*, Erg. & rectg. B D = rectg. A D + rect. A B. Q. E. D,

CONV. Lateri A D duc prependicularem A G = A B, & junge G D. *per* 1. *part.* eſt rectg. G D = rectg. A D + rectg. A G vel rectg. A B; ſed *ex hyp.* eſt rectg. B D = rectg. A D + rectg. A B. Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt rectg. B D = rectg. G D. Erg. *per lem.* 34. 3. eſt B *D* = G D, ideoque X & *Z* ſunt ſibi mutuo æquilatera. Erg. *per* 11. 2. eſt ang. B A D = G A D, ac proinde rectus. Q. E. D.

COR. *Hinc, quadratum hypotenuſæ* B D *æquatur ſimul*
E 47. 1. *quadratis reliquorum laterum. Et è contra.*

PROBL. 1. *Data quæcunque quadrata, aut rectilinea ſimilia addere, ſeu unum omnibus æquale conſtruere.*
Fig. 37.

Quadratorum latera ſint A B, B C, B E. fiat ang. rect. F B Z, in hujus latera à B transfer A B & B C, & junge A C: dein transfer A C à B in X, & tertiam B E à *B* in E, ducaturque E X, hæc erit latus quadrati quæſiti.

Nam per præc. cor. eſt E X q = B E q + B X q, & B X q vel A C q = A B [illegible] B C q, Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt E X q = B E q + A B q [illegible] C q. Q. E. F.

PROBL.

§ 3. *De linea Recta ſecundum extremam & mediam rationem ſecta.*

* THEOR. 40.

Fig. 40. *Si recta AB ejuſque dimidium AD fiant crura trianguli rectanguli: Tunc hypotenuſa DB componetur ex dicto dimidio & majore ſegmento AC totius extremâ ac media ratione ſectæ.* (h. e. *ita ſectæ*, ut *ſit AB. AC. CB* ∺)

Fiat AE = AB, & DF = DB, & AC = AF, ideoque DB = AD + AC. *Per* 22. 2. eſt EFA + ADq = DFq vel DBq, & *per c.* 37. 3. DBq = ADq + ABq, ideoque EFA + ADq = ADq + ABq, & utrinque ablato ADq, eſt EFA = ABq; ſed *per* 15. 2. eſt EFA = EAF + AFq, vel ACq, & *per* 16. 3. ABq = ABC + BAC. Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt EAF vel BAC + ACq = ABC + BAC, & utrinque ablato BAC, eſt ABC = ACq. Erg. *per* 30. 3. eſt AB : AC :: AC : BC. Q. E. D.

COR. E. 1. 13. *Hinc patet, Compoſitam ex dimidio & majore ſegmento poſſe 5plum quadrati ex dimidio.* (h. e. *DBq* = 5 *ADq*)

PROBL. E. 11. 2. & 30. 6. *Rectam AB ſecundum extremam & mediam rationem ſecare in C.*

Datâ AB & ipſius dimidio AD normaliter conſtitutis, jungatur *D*B, fiatque DF = DB, & AC = *AF*. Dico factum. Patet ex theor.

*S*ic ſi *AB* ſit 10. erit DB $\sqrt{125}$, & *AC* $\sqrt{125} - 5$, & CB $15 - \sqrt{125}$.

Theor

* THEOR. 41. E. 5. 13.

Fig. 41. *Si lineæ rectæ DC extremâ ac media ratione ſectæ in E addatur ſegmentum majus AD = DE; Tunc tota compoſita AC in eadem ratione ſecabitur in D.*

Eſt *ex hyp*, DC : DE vel AD :: DE : EC. & *invert.* AD : DC :: EC : DE. Erg. *comp.* eſt AD + DC : DC :: EC + DE : DE vel AD, h. e. AC : DC :: DC : AD. Q. E. D.

* THEOR. 42. E. *ſch.* 5. 13.

Fig. 41. *Si à majore ſegmento AC lineæ rectæ AB extrema & media ratione ſectæ auferatur ſegmentum minus CD = CB. Tunc ipſum etiam ſegmentum majus AC in eadem ratione ſecabitur.*

Ex hyp. Eſt AB : AC :: AC : CB vel CD, Erg. *Divid.* eſt AB — AC : AC :: AC — CD : CD, *h. e.* CB vel CD : AC :: AD : CD. Erg. (*invert.*) eſt AC : CD :: CD : AD. Q. E. D.

CAP. VI.

De quarundem Rectarum incommenſurabilitate.

* THEOR. 43. E. 6. 13.

Fig. 41. *Si linea recta AB extrema & media ratione ſecetur in C, Tunc ejus ſegmenta AC & CB ſunt incommenſurabilia.*

Si à majore ſegmento AC auferatur minus CB vel

æquale C D, erit C *B* majus ſegmentum lineæ A C extrema & media ratione ſectæ, *per præc.* Smiliter ſi ex *C D* auferas A D vel E D, erit hoc majus ſegmentum lineæ C D ſic ſectæ; atque ſic alterna hac detractione in infinitum continuatâ, erunt A C, C D, E D &c. majora ſegmenta linearum A *B*, A C, C *D* &c. extrema & media ratione ſectarum. Si hujus ſeriei A C, *C D* &c. in infinitum continuatæ ulla v. g. E D præcedentem C D metiatur, tunc *per* 18. *ax.* 1. metitur quoque reliquam E C, major quantitas minorem. Q. E. A. Erg. in dicta ſerie nulla quantitas præcedentem metitur: Erg. *per* 39. 1. A C ⊓ C D vel C B.

L E M M A.

Fig. 42. *Si à diametro quadrati F B auferatur latus ejuſdem F E; Tunc reliquum ſimul cum diametro ſui quadrati, æquale erit lateri quadrati propoſiti.* (h. e. AB + DB = *EB*)

Fiat F A = F E, ducatur E A: in A & B erigantur perpendiculares A D & B C; Patet A C eſſe quadratum; nam eſt ang. D B A ſemireɛt. *per* 4. *c.* 2. 3. ideoque etiam A D *B*, nam eſt ang. A rect. ac proinde *per.* 4. 3. eſt *A* D = *A* B. Inſuper in triang. F *A E*, ex *conſtr.* eſt F *A* = F *E*, Erg. *per* 2. *part.* 4. 3. eſt ang. F E *A* = *F A E*, qui ablati ab æqualibus relinquunt *E A D* = *A E* D, Erg. eſt E D = A D vel A B; ideoque E D vel A *B* + D B = E *B*. Q. E. D.

THEOR. 44. E. 117. 10.

Fig. 42. *Diameter & latus quadrati F B, F E ſunt incommenſurabiles.*

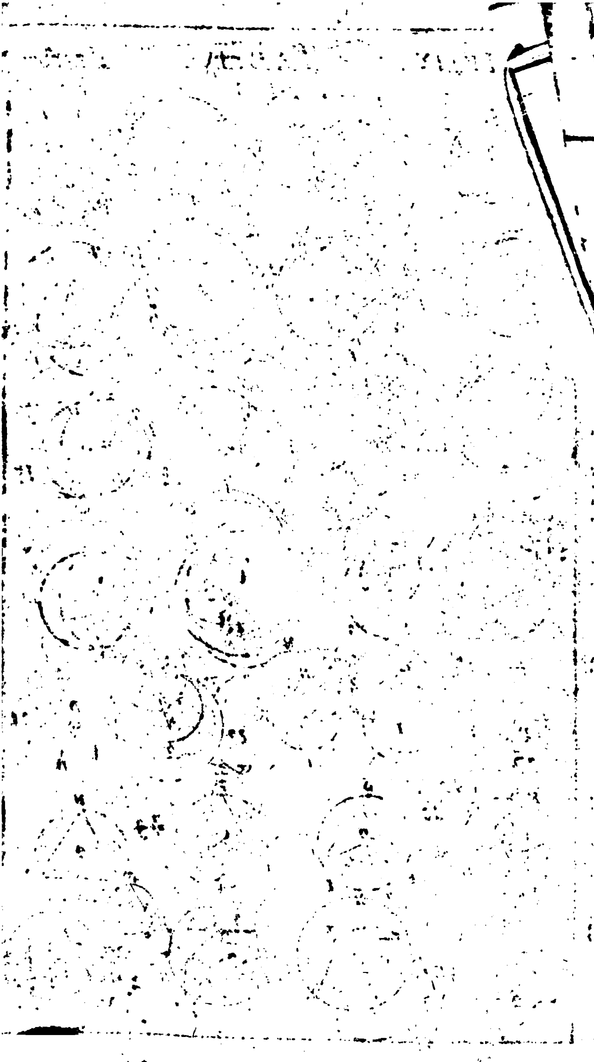
A diametro quadrati F *B* aufer latus F E, ut relinquatur A B, & ex F E vel E *B* aufer A B, quoties potes, ut relinquatur H *B*; & ex A B anferatur *H B* quoties poteſt, ut relinquatur O *B*, atque ſic in infinitum, tunc ex

ex lem. Patet in hac quantitatum ſerie F E, A *B*, *HB*, *O B* &c. F E eſſe latus quadrati, & ſequentem A *B* eſſe exceſſum diametri ejuſdem ſupra latus F E: Item *A B* eſſe latus quadrati, & ſequentem *H B* eſſe exceſſum diametri ejuſdem ſupra A *B*; atque ſic de cæteris in infinitum. Harum ſi ulla H *B*. v. g. præcedentem *A B* metiatur, tunc metitur totam A *B* vel *C B*, & ablatam, ſcil. ſeipſam *H B*, Erg. *per* 18. *ax.* 1. metitur & reliquam ſcil. O *B*, major minorem, Q. E. A. Ideoque harum nulla Præcedentem metitur; proinde *per* 39. 1. *F E* ⌐⊔ *F B.* Q. E. D.

COR. *Hinc patet dari numeros incommenſurabiles.*

Nam ſi latus quadrati F E ſit 2 ped. long. erit *per ſch.* 37. 3. *F B* $\sqrt{8}$ pedum quadratorum, (*h. e.* 2 ped. long. cum parte quadam) ſed eſt F E ⌐⊔ *F B*, Erg. 2 ⌐⊔ $\sqrt{8}$. ſimiliter eſt 3 ⌐⊔ $\sqrt{18}$.

Demonſtrationem theorematis 44tæ cum Lemmate excogitavit Clariſs. Iac. Gregorius.



una
ad
C

pars, vocatur circuli quadrans. Si 360ma, Gradus; hujus vero 60ma dicitur minutum primum; & hujus rurſus 60ma, minutum 2dum. & ſic deinceps.

5. Segmenta, ut & ſectores, vocantur ſimilia, quorum arcus ſunt ſimiles partes ſuarum circumferentiarum.

6. Angulus in ſegmento B A C B eſt qui continetur ſub rectis ductis à ſegmenti terminis B & C ad unum aliquod circumferentiæ punctum A; ut C A B. Et dicitur inſiſtere arcui oppoſito B F C. Fig. 11.

7. Linea ſive recta ſive curva curvam tangere dicitur, quæ ei ſic occurrit ut tamen producta eam non ſecet. Fig. 8. 20. 21.

8. In circulo æqualiter à centro G diſtare dicuntur rectæ F E, K L, cum perpendiculares in ipſas a centro ductæ H G & O G ſunt æquales. Fig. 5.

9. Una figura in aliam ſibi inſcriptam aut circumſcriptam dicitur deſinere, à qua tandem differt tantum per quantitatem aſſignabili quantitate quantumvis parva minorem.

CAP. I.

De circulis Seorſim conſideratis.

§ 1. *De lineis Rectis ad circulos ſpectantibus.*

HArum quædam intra circulum exiſtunt, quædam à puncto externo in ipſum cadunt, aliæ denique tangunt; Earum rationes tantum & ſitus hic conſiderantur.

THEOR. I. E. 2, 3.

Fig. 2. *Recta A C duo quævis peripheriæ puncta jungens, intra circulum cadit.*

Ad datæ rectæ punctum quodvis D ducantur à centro rectæ H D, H A, H C: Quoniam eſt H A = H C, erit

 per

per 4. 3. ang. A = C, ſed *per* 2. 3. eſt ang. H O A > C vel A. Erg. *per* 5. 3. eſt A H > H O. Atqui A H ad circumferentiam tantum pertingit, Erg. H O eouſque non pertingit : Erg. O eſt intra circulum; ideoque tota A C cadit intra. Q. E. D.

COR. *Hinc, Recta circulum tangens, in unico puncto eum tangit.*

Nam ſi vel duo jungeret puncta, intra circulum caderet, ideoque eum ſecaret.

THEOR. 2. E. 3. 3.

Fig. 2. *Si recta B D per centrum ducta aliam non per centrum ductam A C biſecuerit; Tunc ipſam quoque perpendiculariter ſecabit. Et è contra, Si perpendiculariter ſecuerit, etiam biſecabit.*

Ductis à centro A H & H C, fiunt duo triangula ſibi mutuo æquilatera, conſequenter *per c.* 4. 3. æquiangula, atque ſic anguli ad O æquales, ideoque recti, *per* 8. d. 2. Q. E. D.

CONV. Eſt A H = H C, H D commune utrique triangulo, ang. ad O æquales, A = C (*propter* A H = H C) ideoque A H O = O H C 3tius 3tio, Erg. *per* 10. 3. eſt A O = O C. Q. E. D.

THEOR. 3. E. c. 1. 3.

Fig. 2. 1 *Si in circulo recta B D rectam A C perpendiculariter biſecuerit in O; Tunc ſecans per centrum tranſit* 2 *Et biſecabit arcum A D C.*

1. Si dicatur centrum eſſe extra B D, puta in E, tunc ductâ E O, erit *per præc.* ang. E O C rect. ſed *ex hyp.* eſt B O C rect. Erg. *per* 5. *ax.* 2. E O C = B O C, pars toti. Q. E. A.

2. Duc A H & C H, erit *per* 10. 3. ang. A H O = O H C, & poſitô ſemicirculo B C D ſuper B A D, congruent

gruent hi ſemicirculi non tantum quoad areas & arcus *per c.* 1. d. 3. ſed etiam quoad iſtos angulos, *per* 2 *ax.* 2. Atque ſic H C cum H A, propter æqualitatem; ideoque punctum C erit in A, Erg. arcus C D congruet cum A D, ideoque illi æqualis. Q. E D, 2°.

PROBL. I. E. 1. & 25. 3. & 5. 4. *Cujuſvis circuli A B C A aut arcus D N S centrum invenire. Vel, Per tria quævis puncta D, N, S, non jacentia in eadem recta, circulum ducere.* Fig. 3.

Ducantur D N & N S quæ *per* 3. *p.* 4. 2. perpendiculariter biſecentur per rectas B C & A L. Dico O eſſe centrum. Nam *per hoc th.* centrum eſt in A L & B C: Erg. in puncto O quod eſt utrique commune.

PROBL. 2. E. 30. 3. *Arcum datum A C biſecare.* Fig. 2.

Cordam ejus A C perpendiculariter biſeca *per* 3. *p.* 4. 2. Et dico factum. Patet *ex* 2. *part. huj.*

THEOR. 4. E. 4. 3.

Fig. 4. *Si in circulo duæ rectæ non per centrum ductæ,* A B, *C D ſe mutuo ſecuerint; Tunc ſe mutuo non biſecabunt.*

Si una per centrum tranſeat, altera non, patet illam ab hac non biſecari: ſi vero neutra tranſeat; & tamen ambæ dicantur biſectæ in O, tunc recta E O per centrum ducta utramque *per* 2. 4. perpendiculariter ſecaret: Erg. *per* 5. *ax.* 1. erit ang. E O D = E O B, pars toti. Q. E. Q.

THEOR. 5. E. 14. 5.

Fig. 5. *In circulo æquales rectæ F E & K L æqualiter diſtant à centro.* (h. e. *G H = G O*) *Et è contr. Si ſit G H = G O, erit F E = K L.*

1. *Per Conv.* 2. 4. Perpendiculares G H & G O biſecant F E & K L, ductis G F & G K, fiunt duo triangula

gula in quibus (ut jam prob.) eſt H F = O K, & *per* 6. *ax.* 2. G F = G K, & *ex hyp.* ang. H = G O K, & reliqui anguli ad G æqualibus lateribus oppoſiti ejuſdem ſunt ſpeciei, Erg. *per* 13. 3. eſt G H = G O. Q. E. D.

CONV. *Ex hyp.* Eſt G H = G O, & *per* 6. *ax.* 2. G F = G K, & ang. H = G O K, & reliqui F & K ejuſdem ſpeciei; Erg. *per* 13. 3. eſt F H = O K, ſed *per conv.* 2. 4. eſt F H = H E, & O K = O L, Erg. *per* 1. *c.* 5. 1. eſt F E = K L. Q. E. D.

* THEOR. 6. E. 15. 3.

Fig 5. [1] *Rectarum in circulo maxima eſt diameter* A D; [2] *Aliarum autem centro propinquior F E eſt remotiore B C ſemper major.*

1. Ductis G B, G C *per* 6. *ax.* 2. eſt G B + G C = A D; ſed *per* 1. 3. eſt G B + G C, > B C, Erg. A D > B C, ſimiliter de omni alia. Erg. A D eſt maxima, Q. E. D. 1°.

2. *Ex hyp.* eſt G I > G H, fiat G O = G H, per O duc K L perpend. ad G O, duc G K & G L; Quoniam eſt G K = G B & G L = G C, & ang. K G L > B G C, erit *per* 10. 3. K L > B C, ſed *per conv.* 5. 4. eſt F E = K L, ideoque F E > B C. Q. E. D. 2°.

* THEOR. 7. E. 7. 3.

Fig 6. *Rectarum in peripheriam cadentium à quovis diametri puncto O extra centrum: Eſt illa O A quæ per centrum tranſit maxima.* [2] *Reliqua autem O B minima.* [3] *Maximæ etiam vicinior* O C *ſemper eſt remotiore O* D *major.* [4] *Et duæ tantum à dicto puncto in peripheriam duci poſſunt æquales. O E, O H.*

1. E centro duc F C, F D, F E; *per* 1. 3. eſt O F + F C (i. e. O A) > O C.

2. *Per* 1. 3. eſt F B vel F E < O E + O F, Erg. ablato

ablato communi O F, reſtat O B < O E. *per* 4 *ax.* 1.

3. In triang. O D F, O C F, eſt *per* 6. *ax.* 2. F C = F D, F O commune, & ang. O F C > O F *D*; Erg *per* 2 *part*, 10. 3. eſt O C > O D.

4. Fac ang. B F H = B F E, & ducatur O H, eſt F E = F H, F O commune, & ang. O F H = O F E, Erg. *per* 10. 3. eſt O E = O H. *Quod* vero ab O non poſſit alia duci O D = O E vel *O* H, patet ex 3. *part. huj.* Erg. &c. Q. E. D.

C O R. E. 9. 3. *Si ab aliquo puncto interius ſumpto F in peripheriam tres rectæ cadant æquales F D, F C, F H; Tunc punctum iſtud erit centrum.*

Nam *Per* 4. *part. huj.* ab ullo puncto extra centrum duæ tantum duci poſſunt æquales.

* THEOR. 8. E. 8. 5.

Fig. 7. *Rectarum à puncto externo A in cavam peripheriam cadentium,* [1] *Maxima eſt A I quæ per centrum tranſit* [2] *Aliarum autem, maximæ vicinior A H ſemper eſt remotiore major.* [3] *In convexam vero peripheriam cadentium minima eſt quæ inter punctum externum & diametrum interponitur* A B. [4] *Aliarum autem minimæ vicinior* A C *ſemper eſt remotiore* A B *minor.* [5] *Duæ denique tantum æquales à dicto puncto in circulum cadunt.*

1. È centro duc K H, K F, K C, K E; *Per* 1. 3. eſt A I vel A K + K H > A H, ſimiliter de quavis alia.

2. Eſt K H = K F, & A K commune, & ang. A K H > A K F, Erg. *per* 2. *part.* 10. 3. eſt A H > A F.

3 *Per* 1. 3. eſt K A < K C + C A, ideoque æqualibus K *C*, K B, utrinque ablatis, erit A B < A C.

4. *Per* 6. 3. eſt A C + C K < A E + E K, Erg. æqualibus C K, E K, ablatis, erit *per* 4. *ax.* 1. A C < A E.

5. Facto ang. A K L = A K G, eſt L K = C K, & K A utrique triang. commune; ideoque *per* 10. 3. eſt

L A

L A $=$ C A. Quod vero non poſſit alia duci iſtis æqualis, patet ex 4 *part. huj.* Similiter factô ang. A K R $=$ A K *H*, probari poteſt A *H* $=$ A R. & duas tantum rectas æquales poſſe ab A in cavam peripheriam cadere. Erg. &c. Q. E. D.

THEOR. 9. E. 18. & 16. 3.

Fig. 8. [1] *Circuli tangens* C *A diametro per contactum ductæ A H eſt perpendicularis.* [2] *Et è contra. Perpendicularis* C A *ad extremum diametri extra circulum cadit, ſeu eum tangit.* [3] *Neque inter tangentem & circulum alia recta* A L *ad tactum duci poteſt, quin circulum ſecet.*

1. Si neges, eſto à centro alia quædam B F perpend. ad C A, iſta ſecabit peripheriam in G, utpote occurrit tangenti quæ utcunque producta *per* 7. d. 4. circulum non ſecat. Cum igitur ang. B F A dicatur rectus, erit *per* 2. c. 2. 3. B A F acutus, Erg. *per* 5. 3. eſt B F $<$ B A vel B G, totum parte. Q. E. A.

2. Ad quodvis lineæ C A punctum è centro duc rectam B F; eſt ang. F *per* 2 c. 2. 3. acutus, ideoque *per* 5. 3. eſt B F $>$ A B; ſed A B pertingit ad peripheriam, Erg. B F ulterius porrigitur, ideoque F, eademque ratione quodvis aliud lineæ A C punctum eſt extra circulum. Q. E D. 2°.

3. Duc B E perpend. ad A L, erit *per* 5. 3. B A $>$ B E, Erg. punctum B, ipſaque A E cadit intra circulum, ideoque A L eundem ſecat. Q. E. D. 3°.

PROBL. *Rectam ducere quæ circulum in puncto dato A tangat.* Patet.

THEOR. 10. E. 19. 3.

Fig. 8. *Si in contactu A ad tangentem excitetur perpendicularis A H, Tunc in hac erit centrum.*

Si neges, dicatur centrum eſſe in E, à quo ad tactum duc E A; Igitur *per* 1. *part. præc.* erit ang. E A D rectus

rectus; ſed *ex hyp.* eſt HA*D* rect. Erg. eſt ang. EA*D* = HA*D*, pars toti. Q. E. A.

§ 2. *De Angulis in Circulo.*

THEOR. 11. E. 20. 3.

Fig. 9. *Angulus ad centrum B D C duplus eſt anguli ad peripheriam B A C eidem arcui B C inſiſtentis.*

1. Caſ. *Per* 2. 3. eſt ang. B D C = D A C + A C D, h. e. *per* 2. *part.* 4. 3. 2 *D* A C.

2. Et 3 Caſ. Duc diametrum A E; *Per* 1. *caſ.* eſt ang. *B D*E = 2 B A D, & E D C = 2 *D* A C: Erg. in 2. Caſ. eſt totus *B D* C = 2 B A C: & in 3. Caſ. *per* 6. 1. eſt reliquus B D C = 2 B A C reliquo. Q. E. D.

THEOR. 12. E. 21. 1.

Fig. 10. *Anguli in eodem circuli ſegmento D A C, D B C ſunt æquales.*

1. Caſ. ſi ſegmentum D A B C ſemicirculo ſit majus, è centro duc E D, E C, eritque *Per prac.* ang. E = 2 D A C, item = 2 *D* B C; ideoque ang. D A C = D B C.

2. Caſ. Sin ſegmentum ſemicirculo majus non fuerit, ſumma angulorum trianguli A D F æquatur ſummæ angulorum trianguli B C F: Demantur hinc inde ang. A F D = B F C, & A D B = A C B, *Per* 1 *caſ.* ſic reſtat ang. *D* A C = D B C. Q. E. D.

THEOR. 13. E. 31. 3.

Fig. 11. [1] *Angulus A B C in ſemicirculo eſt rectus.* [2] *B A C in majore ſegmento eſt acutus.* [3] *Et A B F in minore eſt obtuſus.*

Primum demonſtratum eſt in *dem.* 1. *probl.* 22. 3. 2dum

patet

patet ex 1. part. huj. & 2. *c.* 2. 3. 3tium ex 1 part. huj. & 1. *ax.* 1.

PROBL. 1. *Hinc ope normæ centrum circuli facillime invenire.*

PROBL. 2. E. 17. 3. *Ad datum circulum* O B *à dato puncto A tangentem* A O *ducere.* Fig. 12.

Ab A ad C duc A C, ſuper quam deſcribatur ſemicirculus circulum datum ſecans in O; Dico A O eſſe tangentem quæſitam. Eſt enim *per hoc th.* ang A O C rect. ideoque *per* 2. *part.* 9. *huj.* A O tangit. Q. E. F.

THEOR. 14. E. 32. 3.

Fig. 13. *Si à contactu circuli & tangentis recta* C E *ducatur circulum ſecans; Tunc anguli quos ad tangentem facit, æquales ſunt ijs qui in alternis exiſtunt ſegmentis.* (h. e. *D* = *E C B*, & *E C* A = *F*)

Sit C D latus anguli D perpend. ad A B, (perinde enim eſt ad ang. D, nam in quocunque ſegmenti E H C puncto ſit, manet ſemper æqualis, *per* 12. 4. Erg. *per* 10. 4 C D eſt diameter; Erg. *per* 1 *part.* 13. 4. eſt C E D rect. Erg. *per* 2. *c.* 2. 3 eſt ang *D* + *D* C E = rect. & 1. *ax.* 1. B C B + *D* C E = rect. Erg. utrinque ablato *D* C E, erit ang. *D* = E C B. Item eſt ang. A C D = C F *D* rectus recto & *per* 12. 4. *D* C E = *D* F E, Erg. *per* 3. *ax.* 1. eſt ang. A C E = C F E Q. E d.

PROBL. 1. E. 33. 3. *Super datam rectam* A B *deſcribere circuli ſegmentum* A I E B, *capiens angulum* A I *B dato angulo C æqualem.* Fig. 14.

Fac ang. B A D = C, per A duc A E perpend. ad H D, fac ang. A B F = B A F, cujus alterum crus ſecet A E in F. centro F per A deſcribe circulum; hic (propter F B A = *F* A B, ideoque F B = F A, *per.* 4. 2.) tranſibit per B. Dico A I B eſſe ſegmentum quæſitum. Nam *per hoc th.* eſt ang. A I B = B A D = C Q. E. F.

Probl. 2.

PROBL. 2. *A dato circulo ſegmentum* AIB *abſcindere*
E. 34. 3. *capiens angulum* I *angulo dato* C *æqualem.*
Fig. 14.

Duc rectam HD quæ tangat datum circulum in A, *per p.* 9. 4. duc item AB quæ faciat BAD = C, Dico factum. Nam ex *conſtr.* eſt ang. BAD = C, & *per hoc.* BAD = I, ideoque I = C. Q. E. F.

PROBL. 3. *Dato circulo triangulum* IAB [1] *inſcribere,*
E. 2. & 3. 4. *&* [2] *circumſcribere, triangulo dato* CON *æquiangulum.* Fig. 14.

1. Recta HD circulum tangat in A, fac ang. BAD = O, & HAI = N, & junge IB. Dico factum. Nam ang. BAD & HAI ſunt æquales angulis I & IBA *per* 14. 4. h. e. O & N, ideoque & IAB = C tertius tertio. Q. E. F. 1.

2. *vid.* 15. *Fig.* Primo inſcribatur triangulum triangulo CON æquiangulum modo jam dicto. 2do rectas à centro duc ad latera perpendiculares, & ubi ſecant circulum in R. S. T. ducantur tangentes, radijs nempe FR, FS, FT perpendiculares, ideoque lateribus trianguli inſcripti parallelæ. Dico factum. Nam *per* 8. 2. eſt ang. ABI = AGS = GBT, & ſic de reliquis; ideoque eſt triang. circumſcriptum inſcripto, ac proinde triangulo dato CON æquiangulum. Q. E. F. 2.

§. 3. *De potentijs rectarum ad circulum ſpectantium.*

THEOR. 15. E. 35. 3.

Fig. 4. *Si in circulo duæ rectæ* AB, CD *ſe invicem utcunque ſecuerint; Tunc rectangula ſub ipſarum ſegmentis ſunt æqualia* (AO × OB = CO × OD)

Connectantur per AC & BD. Ob ang. COA = DOB, & C = B *per* 12. 4. triang. COA & BDO ſunt æquiangula; Erg. *per* 26. 3. eſt OB: OD

O D : : O C : O A. ideoque *per* 34. 3. eſt A O × O B = O D × O C. Q. E. D.

COR. *Hinc, Ordinatæ quadratum æquatur rectangulo ſub partibus diametri*: (h. e. *O B q* = *G O* × *O N*) *ſeu O B eſt media proportionalis inter O G, O N.*

THEOR. 16. E. 36. & 37. 3.

Fig. 16. *Si à puncto extra circulum ducantur tangens* B D *& ſecans* A D; *Tunc rectangulum ſub tota ſecante & parte externa æquale erit tangentis quadrato.* (h. e. A D × D C = B D q) *Et è contra. Si rectangulum ſub tota ſecante & parte externa æquale ſit incidentis quadrato, tunc incidens* B D *erit tangens.*

1. Ductis A B, B C, propter ang. A = D B C *per* 14. 4. & B D C communem, ideoque 3tium 3tio æqualem, triang. B D C, A D B ſunt æquiangula; ideoque *per* 26. 3. eſt A D : D B : : D B : C D; quare *per* 34. 3. eſt A D × C D = D B q.

CONV. Si negas, tangat D N, unde *per* 1. *part.* erit A D × D C = D N q; ſed *ex hyp.* eſt A D × D C = B D q. Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt B D q = D N q, ideoque *per lem.* 34. 3. eſt D N = B D, contra 4 part. 8. 4. Q. E. A.

COR. 1. *Si plures rectæ circulum ſecuerint; tunc rectangula ſub totis ſecantibus ipſarumque partibus externis, erunt æqualia.*

Nam eorum ſingula ſunt ejuſdem tangentis quadrato æqualia.

COR. 2. *Duæ tangentes ab eodem puncto ductæ, ſunt inter ſe equales.*

Nam eſt D B q. Item D F q = A D × D C.

COR. 3. *Ab eodem puncto duæ tantum tangentes* D B, D B

DF *duci poſſunt.*

Nam ſi 3tia DN tangere dicatur, tunc *per* 2. *c.* erit DN = DB = DF; Q. E. A. *per* 4. *part.* 8. 4.

COR. 4. *Si duarum rectarum æqualium in convexam peripheriam ab eodem puncto incidentium DB, DF una DE circulum tangat, altera quoque DF tanget.*

Nam *Per* 1. *part.* eſt AD × DC = DBq = (*ex hyp.*) DFq. ideoque *per conv. huj.* DF tangit.

CAP. II.

De Circulis inter ſe Comparatis.

§ 1. *De circulis ſe mutuo tangentibus & ſecantibus.*

THEOR. 17. E. 5. 3.

Fig. 17. *Circuli ſe mutuo ſecantes BAC, DBC non habent idem centrum E.*

Si E dicatur utriuſque centrum, duc EB, EA; Erg. *per.* 1 *d.* 3. erit ED = EB = EA. Q. E. A.

THEOR. 18. E. 10. 3.

Fig. 18. *Circuli OS, LN in duobus tantum punctis ſe mutuo ſecant.*

Si fieri poteſt, ſecent ſe in pluribus B, C, F, è centro A circuli LN ducantur AB, AC, AF: erunt hæ æquales; ſed eædem ducuntur ad peripheriam OS à puncto intra ſumpto; Erg. *per c.* 7. 4. A eſt centrum circuli OS: atque ſic utriuſque circuli ſe mutuo ſecantis. Q. E. A. *per* 17. 4.

THEOR. 19. E. 6. 3.

Fig. 20. *Circuli ſe mutuo interius tangentes non habent idem centrum F.*

Si F dicatur utriuſque centrum, tunc *per* 1. *d*. 4. eſſet F D = F B = F A. Q. E. A.

THEOR. 20. E. 11. 3.

Fig. 20. *Si duo circuli ſe interius tangant in A; Tunc recta tranſiens per eorum centra G & F tranſibit per tactum.*

Si poteſt, recta F G protracta ſecet circulos extra tactum, ut in B & D, ducaturque G A. Cum G C tranſeat per F centrum circuli majoris, & G B dicatur ejus reliqua, erit *per* 7. 4. G B $<$ G A; ſed *per* 1. *d*. 4. eſt G A = G D, ideoque G B = G D. Q. E. A.

THEOR. 21. E. 12. 3.

Fig. 21. *Si circuli ſe mutuo exterius tangant; Tunc recta conjungens centra A B tranſibit per tactum C.*

Si poteſt, recta jungens centra ſit A D E B circulos extra tactum ſecans in D & E. Duc A D, B C, quæ cum A D B conſtituant triangulum, in quo *per* 1. 3. erit A C + B C $>$ A D E B; ſed *per* 1. *d*. 4. eſt A C + B C = A D + B E, Erg. 2. *ax*. 1. A D + B E $>$ A D E B, pars toto, Q. E. A.

THEOR. 22. E. 13. 3.

Fig. 22. [1] *Circuli ſe mutuo non tangunt niſi in unico puncto.* [2] *Item nec ſe mutuo*, [3] *Nec rectam tangunt ſecundum partem, ſed punctualiter tantum.*

1. Si poteſt, circuli A F E & A H tangant ſe interi-

interius

us in punctis A & H, unde C B centra jungens, ſi producatur, *per* 20. 4. cadet tam in A quam in H; Quoniam igitur 1. *d*. 4. ſic erit C H = C A, & B H > C H, ideo 2 *ax*. 1. erit B A ſeu B H > C A. Q. E. A. Sin dicantur circuli A F E, F E G ſe exterius tangere in E & F, tunc duc rectam E F; *per* 1. 4. in utroque circulo erit; Erg. ſe mutuo ſecant, *cont hyp*. Erg. &c. Q. E. D. 1°.

2. Si poteſt, circuli A F E & A H ſe interius tangant in parte circumferentiæ O A: Recta B C jungens centra, ſi producatur, tranſibit per tactum, puta in A. duc inſuper B O, C O. Quoniam igitur *per*. 1. *d*. 4. eſt B A = B O, addito utrinque B C, erit B C + B O = C A, ſed *per* 1. *d*. 4. eſt C A = C O; Erg. eſt B C + B O = C O. Q. E. A.

Sin dicantur circuli (*Fig*. 21.) ſe exterius tangere ſecundum arcum C D; recta jungens centra tranſibit per tactum. Duc inſuper A D, B D; erunt igitur 1 *d*. 4. A D + B D = A C + C B vel A B. Q. E. A.

Patet 3tium Nam ſi curva & recta ſe tangerent ſecundum totam aliquam ſui partem, tunc ſecundum eandem congruerent, contr. 9. ax. 2. *Sequens admitti poteſt.*

§. 2. *De Circulis Æqualibus.*

* THEOR. 23.

Fig. 23. *Circuli æqualibus radijs* A I, *O G deſcripti ſunt æquales. Et è contra.*

1. Alter alteri imponatur, ita ut ſit I in O. Si non congruant, ſed aliquid unius cadat extra alterum; tunc radij unius non forent æquales radijs alterius, *contr. hyp*. Erg. congruunt, ideoque æquales. Q. E. D.

CONV. Alter alteri imponatur, ita ut ſit I in O, & A C ſuper F G; tunc peripheria A B C *D* propter æqualitatem omnium radiorum ſuorum circumquaque æquidiſtabit à communi centro, & ſimiliter peripheria

F E G H. Erg. vel peripheriæ coincidunt, cadetque C in G, ideoque erit I C = O G; Vel una intra alteram cadit, ab ea circumquaque æquidiſtans, propter commune centrum, omneſque ſuos radios inter ſe æquales; atque ſic ipſorum circulorum unus erit alterius pars, *contr. hyp.* Erg. I C = O G. Q. E. D.

COR. *Hinc liquet, Æquales circulos congruere.*

THEOR. 24. E. 26. & 27. 3.

Fig. 24. *In circulis æqualibus vel eodem, æquales anguli A, G æqualibus arcubus inſiſtunt.* Et è *contra. Idem de ſectoribus.*

1. Ex hyp. eſt ang. D = F, ideoque A = G *per* 11. 4. Erg. *per* 2 *ax.* 2. ſibi invicem applicati congruunt; atque ſic propter A B = E G, & A C = G H, cadent B in E, & C in H; ſed circuli iſti centris ſic applicati congruunt, *per c.* 23. Erg. congruunt B D C cum E F H, & B I C cum E K H; ideoque ſector B A C I cum E G H K. Erg. ſunt æquales. Q. E. D.

CONV. Ex hyp. eſt arc. B I C = E K H, poſito circ. B D C ſuper E F H, ita ut ſit B A in E G, peripheriæ congruent, *per c.* 23. harumque ideo partes æquales B I C, E K *H*; unde C erit in *H*, atque ſic A C cadet in G *H*, Erg. congruent ang. A & G, ideoque ſunt æquales; ac proinde *per* 11. 4. D = F. Q. E. D.

COR. *Hinc, In circulo ſi ſit arcus F K = E L; Erit F E* ‖ *K L.* Fig. 5.

Nam ductâ F L, erit *per hoc th.* ang. E F L = F L K alternus alterno.

THEOR. 25.

Fig. 24. *In circulis æqualibus vel eodem, major angulus majori arcui inſiſtit, Et è contra. Idem de ſectoribus.*

1. Si

1. Si ex hyp. ſit ang. A < G, ponatur A B ſuper G E, atque ſic A C cadet ſupra G *H*, puta in G N; unde erit E K N vel B I C > E K *H*, & ſector E G N K > E G *H* Q. *E.* D.

CONV. Si ſit B I C > E K *H*, non erit ang. A = nec < G, alias *per* 1 *part. præc.* & huj. eſſet arc. B I C = vel > *E B H.* contr. hyp.

SCHOL.

Fig. 25. *Si E F tangat arcum* B *A C in medio; Erit E F* ‖ *B C, & B G = G C.*

Nam ductis D A, D B, D C, fiunt duo triangula, in quibus eſt *D* G commune, & D B = D C, & *per* 24. 4. ang. B D A = C D A; ideoque *per* 10. 3. B G = G C, & B G D = C G *D*, ac proinde *per def.* hi ſunt recti; ſed *per* 9. 4. eſt G A F rect. *Erg.* 5. *ax.* 2. eſt C G D = G A F, externus interno, ideoque *per* 9. 2. eſt *E F* ‖ B C.

THEOR. 26. E. 33. 6.

Fig. 26. *In circulis æqualibus vel eodem, Anguli F D E B A E, vel S,* R. *ſunt inter ſe ut arcus quibus inſiſtunt. Idem de ſectoribus.*

Quod attinet ad angulos centri & ſectores, demonſtratio eadem prorſus erit quæ 25. 3. dummodo quod iſtic dicitur de triangulis & baſibus, hic dicatur de angulis & arcubus: & ubi iſthic 14. 3. hic citetur 24. 4. Et quod ad ang. R & S, patet; nam ſunt dimidia ang. *E A B*, *F A D.*

COR. *Angulus centri* B A E *eſt ad quatuor rectos, ut arcus* B E *cui inſiſtit, ad totam peripheriam.*

THEOR. 27. E. 28. & 29. 3.

Fig. 24. *In circulis æqualibus vel eodem; ſi cordæ B C, E* H *ſint æquales; Tunc arcus ſunt æquales; ma-*



Per c. 26. 4. eſt G H : periph. : : ang. G O H vel B A C : 4 rect. Item B C : periph. : : ang. B A C : 4 rect. ideoque *per* 2. *ax.* 1. G H : periph. : : B C : periph. ac proinde *per* 6. *d.* 1. B C & G H ſunt ſimiles. *Q.* E. D.

CONV. Eſt ang. G O H : 4 rect. : : G H : periph. Item B A C : 4 rect. : : B C : periph. ſed *ex hyp.* eſt G H : periph. : : *B* C : periph. ideoque G O H : 4 rect. : : B A C : 4 rect. ac proinde *per* 12. *ax.* 1. eſt ang. G O H = B A C, & G N H = B D C, utpote iſtorum dimidij. Q. E. D.

COR. 1. *Segmenta ſunt ſimilia, ſi angulos capiant æquales. Et è contra.*

COR. 2. *Duo radij a concentricis peripherijs arcus auferunt ſimiles.*

COR. 3. Fig. 28. *Recta A B à contactu circulorum ſe mutuo interius tangentium ducta ſimiles aufert arcus B A A C.*

Nam *per* 14. 4. eſt ang. F A B = H vel K; ideoque *per* 1. *cor.* ſunt ſegm. A H C & A K B ſimilia, ac proinde ſegm. A C & A B, Erg. *per* 5. *d.* 4. arc. A C & A B ſunt ſimiles.

PROBL. Fig. 29. *Polygono inſcripto A D B aliud ſimile F I G circulo dato inſcribere.*

A centro N duc N A, N B, &c. Fiant in centro O anguli iſtis ad N æquales, & duc F G, G H. &c. Dico factum. Nam arcus quibus anguli ad N inſiſtunt, ſunt ſimiles arcubus quibus anguli ad O inſiſtunt, ſinguli ſingulis, ut arc. G F K, & B A E, *per hoc th.* ideoque *per* 2 *part.* 1. *cor.* eſt ang. F = A. Item F G K = A B E, & F K G = A E B, cum ſimilibus arcubus inſiſtant; Erg. *per* 26. 3. eſt A B : A E : : F G : F K, & ſic de reliquis angulis, horumque lateribus : Erg. ſunt polyg. A D B & F I G *per* 4. *d.* 3. ſimilia. Q. E. F.

LEM. 1. E. 1. 12.

[1] *Polygona ſimilia A D, F I circulis inſcripta, ſunt in duplicata ratione diametrorum A L, F M.* [2] *Item eorum ambitus ut diametri.*

Fig. 30.

1. Duc A C, *B* L, F H, G M. *Ex hyp.* eſt ang. A B C = F G H, & A B : B C :: F G : G H, ideo *per* 28. 3. eſt ang. A C B = F H G, Ergo A L *B* = G M F, utpote *per* 12. 4. iſtis æquales; eſt autem *per* 13. 4. ang. A B L = F G M, ac proinde B A L = G F M, 3tius, 3tio; Erg. eſt A B : F G :: A L : F M; ſed polyg. A D & F I *per* 33. 3. ſunt in duplicata ratione laterum A B, F G, Erg. & diametrorum A L, F M. Q. E. *D.* 1°.

2. Jam prob. A B : F C :: A L : F M, & *ex hyp.* eſt A B : F G :: B C : G H :: C D : *H* I &c. Erg. A B + B C + C D &c : F G + G *H* + *H I* &c :: A L : F M. Q. E. D. 2°.

LEM. 2. Tacq.

Fig. 31. *Si polygona ſine fine circulo inſcribantur; tandem deſinent in circulum.*

Peripheria ſecetur in 4 partes æquales *per* 2 *p.* 3. 4. ducanturque harum cordæ. Patet *per* 27 & 13. 4. E F G *H* eſſe quadratum: Item *per cor.* 37. 3. eſſe $\frac{1}{2}$ A C, ſeu F G q = $\frac{1}{2}$ F *H* q. Ideo ſi F E *H* G a circulo dematur, auferetur plus dimidio. Inſuper ſingulos arcus biſecando, & à punctis ſectionum tangentes eorum & ſemiarcuum cordas ducendo, inſcribantur & circumſcribantur polygona duplo plurium laterum, & à circumſcripti reſiduo E F K I, (quod eſt < 2 E L F) & ſimilibus ſi auferas triangulum E L F & reliqua ejuſmodi; patet plus quàm dimidium auferri. Pari argumento ſi ſemper duplo plurium laterum inſcribantur & circumſcribantur polygona, oſtendam è reſiduo polygoni circumſcripti ſemper plus quàm dimidium auferri: ac proinde *per Lem.* 13. 1. tandem relinquetur magnitudo minor magnitudine quavis data;

h. e.

h. e. circumſcriptum & inſcriptum tandem in ſe invicem deſinent, Erg. multo magis in circulum E F G *H*, utpote intermediæ quantitatis inter utrumque. Q. E. D.

LEM. 3. Tacq.

R
A : B : : X : Z
C F

Si figuræ inſcriptæ in circumſcriptas A, B tandem deſinant; Tunc circumſcriptæ inter ſe eandem habebunt rationem quam inſcriptæ habent. Idem intellige de earum perimetris.

Sit ſemper inſcriptarum ratio X : Z; ſi ergo negas eſſe A : *B* : : X : Z, ſit prius A : *B* > X : Z, ideoque erit alia (quæ minor eſt quam A) puta R : *B* : : X : Z. Quoniam *ex hyp.* inſcriptæ deſinunt in A & *B*, dabuntur tandem aliquæ inſcriptæ puta C & F quæ ab ipſis A & *B* minus deficiunt quam R deficit ab A. Erg. cum C minus deficiat ab A, quam R ab A, erit C > R; Erg. *per* 13 *ax.* 1. eſt C : *B* > R : *B* vel X : Z, ut ponebatur, *h. e.* C : F *ex hyp.* Quoniam igitur (ut jam prob.) eſt C : *B* > C : F, erit *per.* 14. *ax.* 1. circumſcripta *B* < *F* inſcriptâ, totum parte, Q. E. A.

Eodem modo oſtendi poteſt, non poſſe eſſe rat. A : B < X : Z, Erg. eſt A : *B* : : X : Z. Q. E. D.

THEOR. 30. E. 2. 12.

Fig. 30. *Circuli A B D, F G I ſunt in duplicata ratione diametrorum, ſeu ut quadrata diametrorum.*

Polygona ſimilia ſine fine circulo inſcripta ſemper ſunt in duplicata ratione diametrorum; *per* 1. *Lem.* ſed hæc *per* 2. *Lem.* in circulos tandem deſinunt: Erg. *per* 3. *Lem.* ipſi circuli ſunt in duplicata ratione diametrorum, ſeu ut quadrata diametrorum; (hæc quippe ſunt inter ſe etiam in duplicata ratione diametrorum, *per* 33. 3.) Q. E. D.

COR. *Hinc. Circuli & ſimilia polygona ijs inſcripta eandem inter ſe habent rationem.*

THEOR. 31. Papp.

Circulorum proportionalium diametri ſunt proportionales. Et è cont.

Proportionales circuli ſunt inter ſe ut ſuarum diametrorum quadrata *per præc.* ideoque hæc ipſa quadrata ſunt proportionalia; Erg. *per* 36. 3. ipſæ diametri ſunt proportionales. Q. E. D.

CONV. Per. 36. 3. Diametrorum proportionalium quadrata ſunt proportionalia; ſed circuli ſunt ut hæc quadrata; Erg. ſunt proportionales. *Q.* E. D.

* THEOR. 32. Lion.

Fig. 32. *Similes ſectores ſunt ſuis circulis proportionales.* (h. e. *circ. BO : circ. GS :: ſect. ADO : ſect. ESI.*)

Per. 5. *d.* 4. Sunt arc. OD & SI ſimiles, ideoque 2 *part.* 8. 1. ONBD & SNGI ſunt ſimiles: ſed *per* 26. 4. eſt arc. ONBD : arc, OD :: ſect. ONBDA : ſect. AOD, & arc. *S*NGI : SI :: ſect. SNGIE : ſect. *S*EI; ideoque *per* 2. *ax.* 1. eſt ſect. ONBDA : ſect. AOD :: ſect. SNGIE : ſect. SEI. Erg. *comp.* eſt totus circ. O*B* : ſect. AOD :: totus circ. SG : ſect. SI. Et *Permut.* circ. OB : circ. SG :: ſect. AOD : ſect. ESI. Q. E. D.

* THEOR. 33. Lion.

Fig. 32. *Similia ſegmenta ſunt ſuis circulis proportionalia.* (*ſegm. ODF : ſegm. SIL :: circ. OB : circ. SG*)

Per 30. 4. & 33. 3. circ. BO & GS, ut & triang. ADO & EIS ſunt in duplicata ratione AO ad E*S*. ſed *per præc.* eſt circ. OB : circ. GS :: ſect. ADO : ſect. SEI; Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt ſect. ADO : ſect.

SEI

S E I : : triang. A D O : triang. S E I; ac proinde *per* 2 *part.* 8. 1. ſegm. O D F : ſegm. S I L : : A D O : ſect. S E I, vel (*per præc.* circ. O B : circ. E S. Q. E. D.

THEOR. 34. Lion.

Si ſectorum anguli inæqualibus ſuis circulis fuerint reciprocè proportionales; Tunc ipſi ſectores erunt
Fig. 32. *æquales.* (h. e. *ſi circ. O B : circ. G S : : ang. H E S : ang. O A D ; Erit ſect. A D O = ſect. E H S*) *Et è contra.*

Fiat ang. S E I = O A D. eſt *per* 32. 4. ſect. A D O: ſect. S E I : : circ. O B : circ. G S, *h. e. ex hyp.* : : ang. H E *S* : ang. O A D vel S E I; ſed *per* 26. 4. eſt ang. S E H : ang. S E I, vel arc. S H : arc. S I : : ſect. E H S : ſect. E I S. Erg. *per* 2. *ax.* 1. eſt ſect. E H S : ſect. E I S : : ſect. A D O : ſect. E I S. ac proinde eſt ſect. E H S = A D O. Q. E. *D.*

C O N V. Si neges, tunc erit circ. O B : circ. G S : : ang. H E S : angulum alium minorem vel majorem quàm O A D; atque ſic *per* 1 *part.* ſector aliquis major vel minor ſectore A D O erit æqualis ſectori E H S, *contra hyp.*

LEM. 1. Archim.

Circuli peripheria eſt ambitu polygoni inſcripti major; circumſcripti vero ambitu minor.

Prius patet, Nam *per* 6. *d.* 2, ſingula inſcripti latera ſunt minora ſingulis arcubus quos ſubtendunt, ideoque omnia ſimul ſunt omnibus arcubus ſimul ſumptis minora, *h. e.* inſcripti ambitus minor circuli peripheriâ.

2dum ſic *Prob.* Si ut in 2. *Lem.* 30. 4. polygona ſine fine circumſcribantur circulo, circumſcripti ambitus, ut patet, ſemper minuitur; & per hujus decrementum continuum, ſpatium circumſcripti ambitu & circuli perimetro contentum ſemper minuitur : quod ſi per poſſibile aut impoſſibile penitus exhauriri poſſet, tunc ambitus circumſcripti

ſcripti cum circuli perimetro coincideret ſeu congrueret, ideoque *per* 1. *ax.* 2. ei foret æqualis. Erg. circumſcripti ambitus per continuum ſui & prædicti ſpatij decrementum magis & magis ſemper accedit ad iſtam coincidentiam ſeu congruentiam, ideoque & æqualitatem cum circuli perimetro; ſed minus per ſui decrementum non magis appropinquat ad æqualitatem cum majore, verum magis removetur: Erg. circumſcripti ambitus non eſt circuli perimetro minor; ſed neque eſt eidem æqualis, utpote ad prædictam congruentiam & æqualitatem *per* 9 *ax.* 2. nuſquam pertingit. Erg. eſt circuli perimetro major. Q.E.D.

COR. *Circuli arcus eſt ſua tangente minor.*

LEM. 2. Tacq.

Fig. 33. *Si polygona ſine fine circulo inſcribantur & circumſcribantur; Tandem eorum ambitus deſinent in circuli peripheriam.*

Sit ELFN quadrans circuli habens ſibi inſcriptam 4tam quadrati partem EFN & 4tam octogoni partem ELFN, ſitque LO = OF, Oq = LP, & es = LP. Patet, quod per inſcriptionem quadrati, ab NO aufertur NP vel Nq, & relinquitur Oq. Et per inſcriptionem octogoni à reſiduo Oq aufertur eq, majus quam dimidium (nam eſt eq > es = $\frac{1}{2}$ LP vel $\frac{1}{2}$ Oq, *per* 5. 3, & 26. 4. Quod ſi ſemper hoc fiat inſcribendo polygona duplo plurium laterum, ſemper auferetur à reſiduo majus quàm dimidium. Erg. altitudo alicujus polygoni inſcripti tandem differet ab altitudine ſimilis circumſcripti ſeu diametro circuli per quantitatem quavis aſſignatâ quantumvis parvâ minorem. *per Lem.* 13. 1.

Inſuper cum ambitus polygoni circumſcripti plurium laterum quàm quatuor ſemper minor ſit 4plo altitudinis ſuæ ſeu diametri circuli: & ſimiliter ambitus inſcript ſemper minor 4plo ſuæ altitudinis; (ſunt enim *ex hyp.* figuræ ſimiles) ideo differentiæ ambituum cujuſvis ſcil. polygoni inſcripti & ſimilis circumſcripti ſemper eſt minor

minor 4plo differentiæ altitudinum. Igitur quantitas quàntùmvis parva aſſignata eſto linea C. Jam probatum eſt, ſi ſine fine polygona circulo circumſcribantur & inſcribantur, differentiam inter altitudinem alicujus inſcripti & altitudinem ſimilis circumſcripti ſeu diametrum circuli tandem evadere minorem lineâ C: Item differentiam ambituum ſemper eſſe minorem 4plò differentiæ altitudinum; ac proinde differentia ambituum inſcripti & ſimilis circumſcripti tandem evadet minor 4plo lineæ C. Verum per duas bipartitiones ſumi poteſt pars 4ta lineæ C, & etiam, ut hactenus probatum, polygonis ſine fine circulo inſcriptis & circumſcriptis poteſt differentia inter altitudinem alicujus inſcripti & altitudinem ſimilis circumſcripti ſeu diametrum circuli tandem evadere minor 4tà parte lineæ 4 C, *h. e.* quàm ipſa C. Erg. ambitus polygoni ſine fine circulo inſcripti & circumſcripti tandem deſinent in ſe invicem *per* 9. *d.* 4. Erg. multo magis in circuli peripheriam, utpote *per* 1. *Lem.* intermediæ quantitatis inter utrumque Q. E. D.

THEOR. 35. Papp.

Circulorum inæqualium peripheræ ſunt inter ſe ut diametri.

Ambitus polygonorum ſimilium circulis inæqualibus ſine fine inſcriptibilium aut circumſcriptibilium tandem deſinunt in circulorum peripherias. *per* 2. *Lem.* Ideo peripheriæ ſunt inter ſe ut iſti ambitus, *per* 3. *Lem.* 30. 4. ſed ambitus ſunt inter ſe ut circulorum diametri, *per* 2. *part.* 1. *Lem.* 30 4. Erg. *per* 2 *ax.* 1. peripheriæ ſunt inter ſe ut diametri, Q. E, D.

CAP.

CAP. III.

De Figuris rectilineis circulo inſcriptis & circumſcriptis, Præſertim ordinatis, earumque & circuli areis.

* THEOR. 36. E. 22. 3.

Fig. 34. & 35. *Quadrilateri circulo inſcripti anguli oppoſiti B & D duobus rectis ſunt æquales. Et è contr.*

DUctis A C, B D, *per* 2 *part.* 2. 3. B C A + A B C + B A C = 2 rect. ſed *per.* 12. 4. ang. B D A = B C A, & B D C = B A C. Erg. A B C + A D C = 2 rect. Q. E. D. 1°.

CONV. Per quoſlibet tres angulos B, C, D, conſtat ex *p.* 3. 4. duci poſſe circulum, qui ſi negetur tranſire etiam per A, dicatur per F; tunc ductis F B, F D, erit *per* 1. *part.* ang. C + F = 2 rect. ſed *ex hyp.* eſt C + A = 2 rect. Erg. *per* 2. & 3 *ax.* 1. erit A = F, Q. E. A. *per* 2. *part.* 6. 3.

COR. 1. *Patet ang. extern.* L *B C = A D C.*
COR. 2. *Rhombo circulum circumſcribi non poſſe.*

THEOR. 37.

Fig. 36. *Figura æquilatera circulo inſcripta, eſt etiam æquiangula,* h. e. *ordinata.*

Propter cordas *ex hyp.* eſt arc. A M L = M L K, ideoque arc. L E A = K C M, reliquus reliquo, ideoque *per* 2. *part.* 24. 4. ang. M = L; ſimiliter de cæt.

THEOR.

THEOR. 38.

Fig. 36. *Si Duo quivis figuræ ordinatæ anguli A, C biſecentur; Tunc ſecantium concurſus O erit centrum circuli circumſcriptibilis.*

Ang. A O C biſeca per B O. *Ex conſtr.* eſt ang. B A C = B C O, A O B = B O C, & B O commune, ideo *per* 12. 3. eſt A O = O C. Dein duc O E, in triang. O A C, O C E, *ex hyp.* eſt A C = C E, & *ut jam prob.* O A = O C, & *ex conſtr.* ang. O A C = O C E, Erg. *per* 10. 3. O C = O E, & reliqui anguli, ſinguli ſingulis. Similiter probari poteſt reliquas lineas ad reliquos figuræ angulos ductas eſſe æquales; ac proinde circulus intervallo O A ductus tranſibit per C. E. K. L. M. Q. E. D.

PROBL. E. 14. 4. *Hinc, Cuilibet figuræ ordinatæ circulum circumſcribere.*

THEOR. 39.

Fig. 37. *Si duo quævis figuræ ordinatæ latera M A, A C perpendiculariter biſecentur; Tunc ſecantium concurſus O erit centrum circuli inſcriptibilis.*

Duc O A. In his triang. *ex conſtr.* eſt F A = B A, O A commune, ang. ad F & B recti, reliqui autem ſimiliter oppoſiti ejuſdem ſpeciei. Erg. *per.* 13. 3. eſt O F = O B, & ang. ad A, ut & ad O, æquales. Item ductâ O C, propter A B = B C, O B commune, & A B O = C B O, eſt *per* 10. 3. O C = O A, & B A O = B C O = O C D, propter A = C. Deinde biſeca C E per O D; propter C B = C D, O C commune, & B C O = D C O, erit O B = O D, & ang. ad D recti. Similiter probari poteſt, reliquas rectas ab O ad media laterum reliquorum ductas, eſſe rectæ O D & inter ſe æquales, & ad figuræ latera perpendiculares, Erg. circulus intervallo O B ductus tanget omnia latera. Q. E. D.

PROBL. E. 8. & 13. 4. *Hinc, Cuivis figuræ ordinatæ circulum inſcribere.*

THEOR.

THEOR. 40. E. 1 c. 15. 4.

Fig. 36. *Latus hexagoni A C æquale eſt radio circuli circumſcripti.*

Circulô circumſcripto & ductis *O A*, *O C*, eſt *per c.* 26. 4, ang. *A O C* $\frac{2}{3}$ rect. Erg. *per* 2. 3. eſt *O A C* + *A C O* = $\frac{4}{3}$ 2 rect. ſed *per* 2 *part.* 4. 3. eſt ang. *O A C* = A C O, ideoque eſt triang. A O C, æquiang. Erg. *per c.* 4 3. eſt A C = O A. Q. E. D.

PROBL. 1. *Hexagonum & trigonum circulo inſcribere.* E. 15. 4. & 2 *c.*

Prius patet, radium ſcil. A O ſexies peripheriæ accommodando. Poſterius, ducendo rectas ab hexagoni angulo ad angulum, uno ſemper intermiſſo, ut ab A ad E & L.

PROBL. 2. *Super datam L K hexagonum conſtruere.* Tacq.

Scil. Super L K conſtruendo triang. æquilat. K L O, & intervallo O L circulum ducendo, reliqua patent.

* THEOR. 41. E. 12. 13.

Fig. 38. *Latus trigoni potentiâ triplum eſt radij circuli circumſcripti.* (h. e. *A B q* = 3 *A D q.*)

Cum trigoni latera æquales arcus ſubtendant, erit arc. A B $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{6}$ periph. & B E $\frac{1}{6}$; ideoque *per præc.* eſt B E = B D. Hinc. *per c.* 37. 3. eſt A E q = A B q + B E q. & *per c.* 17. 2. A E q = 4 A D q vel 4 B E q; ideoque A B q + B E q = 4 A D q. Erg. utrinque ablato B E q vel A D q, reſtabit A B q = 3 A D q. Q. E. D.

COR. *Hinc & ex* 13. 3. *Patet.* D E = F E. *Item A E q* : *A B q* :: 4 : 3. *Item A B q* : *A F q* :: 4 : 3. Nam *per* 36. 3. eſt A B q : A F q :: A E q : A B q.

* THEOR. 42.

Latus tetragoni potentiâ duplum eſt radij circuli circumſcripti.

Patet ex cor. 37. 3.

PROBL. *Tetragonum circulo dato inſcribere*
B. 6. 4. Aliunde facilius.

THEOR. 43. E. c. 9. 13.

Fig. 39. *Latus decagoni eſt majus ſegmentum radij extrema ac media ratione ſecti.*

Sit AB latus decagoni, unde & propter ang. A = ABP, erit ang. BPA $\frac{1}{5}$ 2 rect. & ABP $\frac{2}{5}$ 2 rect. Inſuper ſit BE = BP, inde *per* 2 *part.* 4. 3. & 1 *part.* 2. 3. erit E = $\frac{1}{2}$ ABP vel $\frac{1}{5}$ 2 rect. *h. e.* E = BPA; atque ſic erunt AEP, ABP triang. æquiang. Nam eſt ang. A utrique communis, Erg. *per* 26. 3. eſt AE : AP vel B*E* : : AP vel BE : AB, ſeu B*E* & *AB* ſunt ſegmenta lineæ extrema & media ratione ſectæ, *Erg.* ſi AB = BF auferatur à *B E*, erit *per* 43. 3. A*B* vel BF majus ſegmentum radij *B E* vel BP extrema ac media ratione ſecti. Q. E. D.

PROBL. 1. *Hinc & ex probl.* 40. 3. *Decagonum, ideoque & pentagonum facile inſcribere circulo dato*
E. 11. 4.

PROBL. 2. *Hinc & ex* 1 *p.* 40. 4. *quindecagonum circulo inſcribere.* Fig. 40.
E. 16. 4.

Nam ſi ab eodem puncto *E* accommodes latus trigoni & latus pentagoni, erit AB latus quindecagoni. Eſt enim arc. *EB* $\frac{1}{3}$ vel $\frac{5}{15}$ periph. & *EFBA* $\frac{2}{5}$ vel $\frac{6}{15}$ *Erg.* *B A* eſt $\frac{1}{15}$. Q. *E. F.*

PROBL. 3. *Super datum* EH *decagonum conſtruere*
Fig. 40

H Divi-

Dividatur E H *per p.* 40. 3. extrema & media ratione, eidemque adjiciatur ſegm. maj. ut inde data E H evadat majus ſegmentum totius compoſitæ E O ſimiliter ſectæ, *per* 41. 3. Erg. ſi E O fiat radius, erit E H latus decagoni, *per hoc. th.* ſuper quod conſtitutò H E O, intervallò O E ducatur circulus &c. Q. E. F.

PROBL. 4. *Super datam A D pentagonum conſtruere.* Fig. 41.

Data A D extrema & media ratione ſecetur, addatur ſegm. maj. unde fit A G; hujus intervallo, punctiſque A & D duo arcus ſe invicem ſecent in E, unde ductis E A, E D & circ. H K, erit A D latus decagoni circulo H K inſcripti, & ſic ang. E $\frac{1}{10}$ 4 rect. Et ductò circ. A E D, ang. A C D *per* 11. 2. erit. $\frac{1}{5}$ 4 rect. ac proinde A D eſt lat. pentag. Q. E. F.

SCHOL.

Ex jam dictis patent modi circulum geometrice dividendi in partes 3. 6. 12. &c. 4. 8. 16. &c. 5. 10. 20. &c. 15. 30. 60. &c. Verum quod ad diviſionem in partes datas quaſcunque, ut & conſtructionem figurarum ordinatarum quarumcunque, ad artificia recurrendum, de quibus ut ordinatarum delineatione mechanica, Geometras practicos conſulite.

THEOR. 44.

Fig. 42. *Si duo anguli cujuſvis trianguli biſecentur; Secantium concurſus D erit centrum circuli inſcriptibilis.*

Ductis â *D* ad latera perpendicularibus, *ex conſtr.* eſt ang. D B E = D B F D E B = D F B, & latus D B commune, Erg. *per* 12. 3. E D = D F; ſimiliter eſt D G = D F, ideoque circulus intervallò E D ductus tranſibit per E, F, G; & cum anguli ad E, F, G ſint recti, tanget *per* 2 *part.* 9. 4. omnia trianguli latera. Q. E. D.

PROBL.

PROBL. 1. *Hinc. Cuilibet triangulo circulum inſcribere.*
E. 4. 4.

* PROBL. 2. Herig. *Hinc, Cognitis trianguli lateribus; invenire eorum ſegmenta quæ ſiunt à contactibus inſcripti circuli.*

Sit AB 12, AC 18; BC 16, Erit AB + BC = 28, ex quo auſer 18 = AC = AE + FC, *per* 2 c. 16. 4. reſtat 10 = BE + BF. Erg. eſt BE vel BF = 5, FC, 11, ideo GA eſt 7.

THEOR. 45.

Fig. 43. *Si Rectilinei circumſcripti latera fuerint inſcripti lateribus parallela: Tunc circumſcriptum eſt inſcripto ſimile.*

per 8. 2. & 5 cor. 2. 3. Sunt OAB, ORT, triang. æquiang. Item OEA, OSR; ideo AO : RO :: AB : RT :: AE : RS. ſimiliter de reliquis lateribus. Erg. &c. Q. E. D.

PROBL. E. c. 12. 4. *Hinc figuræ cujuſvis ordinatæ circumſcriptio, quæ circulo inſcribi poteſt.*

Circulo dato inſcribatur ejuſmodi figura ordinata, deinde biſecentur ſingula inſcripti latera per circuli radios OF, OG, &c. tandem per F, G, H. &c. ducantur rectæ lateribus inſcripti parallelæ. Dico factum.

Vel hoc fieri poteſt ducendo tangentes per R, S, T, &c.

THEOR. 46. Arch.

Fig. 43. *Polygonum ordinatum circumſcriptum æquale eſt rectangulo ſub ſemiambitu ſuo & circuli radio FO.*

Ductis OA, OE, OD. &c. & radiis OF, OK &c ad contactum; patet radium eſſe communem altitudinem omnium triangulorum in quæ polygonum reſolvitur; ſed *per* 16. 3. eſt triang. BOA = FO × EF; Erg. omnia

ſimul (ſeu totum polygonum) æqualia ſunt rectangulo ſub radio & ſemiambitu. Q. E. D.

THEOR. 47. Arch.

Fig. 43. *Polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquale eſt rectangulo ſub ſemiambitu ſuo & perpendiculari O P in latus unum è centro ductæ.*

Per 1 *part* 11. 3. O P R, O R L &c. ſunt triang. æqual. in omnibus: Item eorum altitudines O P, O L, &c. ſunt æquales (*Nam per* 2 *part*. 2. 4. biſecant latera in P, L, &c. atque ſic in triang. P R O, R O L, &c. propter P R = R L, R O commune, & ang. P = L, erit O P = O L, *per* 13. 3.) Erg. omnia ſimul triangula, ſeu polygonum eſt æquale rectangulo ſub O P & ſemiambitu. Q. E. D.

LEM. Tacq.

Fig. 44. *Rectangulum ſub radio circuli F R & ſemiambitu polygoni circumſcripti tandem deſinit in rectangulum ſub radio & ſemiperipheria F B contentum.*

Aſſignetur figura quantumvis parva Z. Super A B *per* 1 *part* 17. 3. fiat rectang. A O = Z, cujus baſis erit O B; *Per* 2 *Lem*. 35. 4. differentia inter ſemiperipheriam F B & ſemiambitum alicujus tandem polygoni circumſcripti eſt minor lineâ quantumvis parvâ O B; Erg. differentia inter R B & rectangulum ſub radio A B ſeu F R & ſemiambitu polygoni circumſcripti contentum erit minor quam A O vel Z, *per c*. 14. 3. Nam iſta differentia eſt rectangulum æquè altum rectangulo A O & ſuper minore baſe. Erg. rectang. ſub radio F R & ſemiambitu circumſcripti deſinit in rectang. ſub radio & ſemiperipheria contentum R B. Q. E. D.

THEOR. 48. Arch.

Circulus æqualis eſt rectangulo ſub radio & ſemiperipheria.

Per

Per 2 *lem.* 30. 4. Polygona ſine fine circumſcripta deſinunt in circulum; & etiam rectangula ſub ſemiambitu polygoni circumſcripti & radio contenta tandem *per lem.* deſinunt in rectangulum ſub ſemiperipheria & radio. Erg. circulus eſt æqualis rectangulo ſub radio & ſemiperipheria. Q. E. D.

COR. *Hinc. Sector eſt æqualis rectangulo ſub radio & ſemiarcu.*

SCHOL.

Ad elementa non ſpectat agere de ratione inter circuli diametrum & peripheriam: Utcunque hic monere licet *Archimedem* prolixo calculò inveſtigaſſe diametrum circuli contineri in ambitu polygoni circumſcripti 96 laterum minus quam ter & $\frac{1}{7}$: in ambitu vero inſcripti amplius quam ter & $\frac{10}{71}$. Priore ratione ſæpius utitur in praxibus. Alij multò propinquiores veræ inveſtigarunt rationes, quarum exactiſſima parvis numeris expreſſa eſt illa *A. Metij* 113 ad 355, quà ſi utaris in terræ circumferentia inveſtiganda ex data diametro, circumferentia ſic inventa veram non excedet 10 pedibus; cum circumferentia ope rationis *Archimedeæ* 7 ad 22 inventa 5 milliaria excedat

Magnis numeris expreſſa omnium exactiſſima eſt hæc *Ludolphi* à *Ceulen*, quæ ſic ſe habet.

Diam.	100000000000000000000000000000000000
Amb. min. verâ.	314159265358979323846264338327950289
Amb. maj. verâ.	314159265358979323846264338327950288

Hac ratione ſi utaris ad inveſtigandum circumferentiam pro diametro bis centum milliones milliarium continente, non errabis una pedis particulâ centimillioneſima; quæ minor eſt pars diametri hic propoſitæ, quàm una arenula eſt orbis terreni.

Si non DB, ſed alia DE dicatur plano perpendicularis, tunc per E duc BE & FC facientes ang. BEF rect. Item DF & DC. Propter ang. BEF, FBD, *ex conſtr. aut hyp.* rectos, Erunt *per cor.* 37. 3.

$BF_q = FE_q + BE_q$. *h. e,* $DF_q = FE^q + DE^q + 2\,BE_q$: Ideo eſt $DF^q > FE_q + DE_q$; *Erg.* ang. DEF non eſt rect. (alias, *per cor.* 37. 3. eſſet $DF_q = FE_q + DE_q$ contra jam probatum)

$BD^q = DE_q + BE^q$.

$DF^q = BF_q + BD_q$.

Erg. *per* 1 *def.* DE non eſt perpendicularis plano, *contra. ſuppoſ.*

THEOR. 2. E. 5. 11.

Fig. 4. *Si eadem recta AR ad idem punctum A tribus rectis BA, CA, FA perpendicularis fuerit; Erunt hæ tres in uno plano.*

Si fieri poteſt, eſto earum una BA in alio plano RO, quod ſecet planum reliquarum per rectam AO. Quoniam *ex hyp.* eſt AR recta ad CA & FA, Erit *per præc.* plano LH recta: *Erg. per* 1 *def.* eſt ang. RHO rect. ſed *ex hyp.* eſt RAB rect. *Erg.* eſt RAO = RAB, totum parti Q. E. A.

THEOR. 3. E. 7. 11.

Fig. 1. *Recta CO ſecans plani rectas EE, EE, in eodem exiſtit.*

Nam ſi planum aliquod ſecet planum EE, EE, in *O* & C; tunc communis ſectio (utpote linea recta *per* 3 *ax.*) coincidet cum CO.

THEOR. 4. E. 6. 11.

Fig. 5. *Recta AB, CD eidem plano EF perpendiculares, inter ſe ſunt parallelæ.*

Junctâ BD, fac in plano FE lineam DG perp. BD & = AB, & duc AD, AG, BG. Sunt BD & DG = BD & AB, & ang. BDG = ABD, ideo *per* 10. 3.

10. 3. B G = A D; igitur triang. A B G & G D A ſunt ſibi mutuò æquilatera, ac proinde ang. A B G = A D G: ſed *per* 1 *def. huj.* eſt A B G rect. ideo eſt A D G rect. Sed *ex conſtr. & 1 def. huj.* ſunt B G D & C D G rect. Erg. G D eſt perp. ad C D, A D, B D; ideoque *per* 2. *huj.* hæ ſunt in uno plano: ſed etiam A B *per* 2 *ax. huj.* eſt in uno plano cum A D & B D; Erg. C D & A B ſunt in uno plano; ſed *ex hyp.* eſt ang. A B D = C D B, Erg. *per* 9. 2. eſt A B || C D. Q. E. D.

THEOR. 5. F. 13. 11.

Fig. 5. *Lineæ ab eodem puncto ductæ A D, C D, vel A B, A D nequeunt ambæ eſſe eidem plano perpendiculares.*

Alias *per præc.* eſſent parallelæ, *contr. def. parall.*

THEOR. 6. E. 8. 11.

Fig. 5. *Si parallelarum una A B ſit plano E F perpendicularis; Eidem erit & altera C D.*

Per 3. huj. eſt C D in plano rectarum A B, B D; & ſi dicatur alia D K eſſe perp. E F, erit *per* 4. *huj.* D K || A B, & ſic in plano rectæ A B, in quo *per* 3. *huj.* ſunt etiam A B, C D, B D; ſed *per* 1 *def. huj.* eſt K D B rect. & etiam ang. C D B, *per* 8. 2. Erg. ang. K D B = C D B, totum parti. Q. E. A.

PROBL. 1. *A puncto ſublimi C ducere perpendicularem* Fig. 6. *C G ad planum A B.* E. 11. 11.

In plano A B duc quamvis D F, ad quam ex C perpend. ducito C E: ad eandem per E in plano duc perp. A E M; tum ad A M ex C demitte perp. C G, hæc erit quæſita. Per G fiat H G || D F.

Ex conſtr. eſt D E perp. ad C E & E M, Erg. etiam ad planum C E M, *per* 1. *huj.* adeoque *per* 6. *huj.* eſt H G perp. ad C E M; Erg. *per* 1 *def. huj.* eſt H G perp. C G, ſeu C G perp. H G; ſed *ex conſtr.* eſt etiam C G perp. E M.

EM; Erg. *per* 1. *huj.* eſt CG perp. plano AB. Q.E.F.

PROBL. 2. *In dato plani puncto B perpendicularem* Fig. 5. *erigere.* E. 12. 11.

A quovis puncto ſublimi C ad planum EF demitte perp. CD, ductâque DB, fiat AB || CD, Patet *per* 6. *huj.* AB eſſe quæſit.

Utrumque hoc problema ope normæ ſeu gnomonis puncto dato applicatæ perficitur mechanicè, vel accuratius ope duarum, ut patet ex 1. *huj.*

THEOR. 7. E. 9. 11.

Fig. 7. *Rectæ CF, AD eidem rectæ BE parallelæ, licet in diverſis planis, ſunt inter ſe parallelæ.*

Rectæ FE & BD normaliter jungant datas lineas; erit *per* 1. *huj.* BE perp. plano FED; ideoque *per* 6. *huj.* etiam CF & AD. Erg. *per* 4. *huj.* CF || AD. Q.E.D.

THEOR. 8. E. 10. 11.

Fig. 7. *Si duæ rectæ AC, BC ſint parallelæ duabus rectis DE, EF, licet non in eodem plano; æquales angulos C, F comprehendent.*

Fiant CA & CB = FD & FE, ducanturque reliquæ lineæ. Cum ſit AC || & = FD, erit *per* 11. 2. AD || & = CF: ſimiliter BE, CF; Erg. etiam *per præc.* AD || & = BE, ideoque *per* 11. 2. AB = DE. Cum igitur triang. BAC, EDF, ſint ſibi mutuò æquilatera, erit. *per* 11. 3. C = F. Q.E.D.

LIB. VI.

De Planis quoad ſitum inter ſe comparatis, & angulo ſolido.

Definitiones.

1. PLanum CG plano AB dicitur perpendiculare, cum rectæ in uno plano ductæ KH perpendiculares communi planorum ſectioni CD, alteri plano AB ſunt perpendiculares. Fig. 8.

2. Planum RD ad planum AB inclinatur, cum angulus eſt acutus ACR quem comprehendunt duæ lineæ in utroque plano ductæ & perpendiculares communi ſectioni: & ang. ACR eſt inclinatio. Fig. 8.

3. Planum ad planum ſimiliter inclinari dicitur, cum anguli inclinationum ſunt æquales.

4. Parallela plana ſunt, quæ in omnem partem producta æquidiſtant ubique.

5. Angulus ſolidus rectilineus eſt qui pluribus continetur quam duobus angulis planis BAC, CAD, BAD non in eodem exiſtentibus plano, ſed idem punctum angulare habentibus.

THEOR. 1. E. 14. 11.

Fig. 9. *Iſta plana CD, FE ſunt parallela, quibus eadem recta AB eſt perpendicularis.*

Si dicantur concurrere, à communis ſectionis puncto quovis O duc duas rectas OA, OB; unde in triang. OAB duo ang. A & B ſunt recti *ex hyp.* & 1 def. 5, quod contr. 2. 3.

THEOR.

THEOR. 2. E. 15. 11.

Fig. 9. *Si duæ rectæ ſe mutuo tangentes C G, G D duabus alijs I E, E H ſint parallelæ; Etiam plana per ipſas ducta erunt parallela. E F || C D.*

A quovis plani puncto A duc A B perp. E F, fiatque N A || C G, R B || I E, B M || E H, A L || G D: unde *per* 7. 5. eſt R B || N A, & B M || A L. Cum igitur *per* 1. *def.* 5. ſit A B perp. B M & B R, erit etiam *per* 8. 2. A B perp. A L & A N: Erg. A B (quæ ex *conſtr.* eſt perp. ad E F) eſt perp. ad C D *per* 1. 5. Erg. *per* 1. *huj.* E F || C D. Q. E. D.

COR. *Hinc, Rectam A B plano E F perpendicularem, eſſe etiam plano parallelo C D perpendicularem.*

THEOR. 3. E. 16. 11.

Fig. 9. *Planum N A B R ſecans plana parallela C D, E F, in ijs facit ſectiones parallelas N A, R B.*

Nam alicubi convenirent, ut in O, (cum ſint in eodem plano ſecante) ſi dicantur non eſſe parallelæ: quare cum *per* 1 *ax.* 5. totæ A N O, B R O, ſint in planis E D, E F productis, etiam hæc plana convenirent, *contr.* 4 *def. huj.* Q. E. A.

THEOR. 4. E. 17. 11.

Fig. 10. *Parallela plana rectas A B, C D proportionaliter ſecant.*

In planis E F, I K, ſint ſectiones A C, B D: duc A D occurrentem plano G H in N, & junge N L, N M. Plana triangulorum A C D, A B D faciunt ſectiones A C, N M, & B D, L N *per præc.* parallelas: Erg. *per* 18. 3. A L : L B : : A N : N D : : C M : M D. Q. E. D.

THEOR.

THEOR. 5. E. 18. 11.

Fig. 8. *Si recta FE ſit plano AB perpendicularis; Omnia per ipſam plana GC erunt eidem perpendicularia.*

Per FE duc planum quodvis GC faciens communem ſectionem CD, è cujus puncto quovis H in plano CG duc HK || FE: unde *per* 6. 5. erit HK perp. AB; Erg. *per* 1 *def.* 6. eſt planum GC perp. AB. Q. E. D.

THEOR. 6. E. 19. 11.

Fig. 11. *Si duo plana AB, CD ſe invicem ſecantia ſint uni plano GH perpendicularia; Eorum communis ſectio EF erit eidem perpendicularis.*

Perpendicularis ſectioni LB ducta ex F in plano AB, eſt perp. plano GH *per* 1. 5. Et ſimiliter quæ ex F in plano CD ducitur perp. ſectioni ID; ſed *per* 5. 5. unica ex F duci poteſt perp. plano GH; Erg. perp. plano GH excitata in F exiſtit in utroque plano AB, CD, ac proinde eſt utriuſque ſectio communis FE. Q. E. D.

* THEOR. 7. E. 20. 11.

Fig. 12. *Trium angulorum BAD, DAC, BAC angulum ſolidum A componentium duo quilibet ſunt tertio BAC majores.*

E maximo BAC aufer BAE = BAD, & fac AD = AE, ducanturque BD, BC, CD. Quoniam eſt latus AB commune, & AD = AE, & ang. BAE = BAD, erit *per* 10. 3. BE = BD; ſed eſt BD + DC > BC: Erg. æqualibus BE, BD, utrinque ablatis, reſtabit DC > EC. Cum igitur *ex conſtr.* ſit AD = AE, AC commune, & DC > EC, erit *per* 2 *part.* 11. 3. ang. CAD > EAC. Erg. ang. CAD + BAD > BAC. Q. E. D.

THEOR.

THEOR. 8. E. 21. 11.

Fig. 12. *Omnes ſimul anguli plani angulum ſolidum A conſtituentes ſunt quatuor rectis minores.*

Rectæ B C, C D, C B, in uno plano exiſtentes ſubtendant angulos planos angulum ſolidum A componentes; quo facto conſtituitur pyramis, *vid.* 4. *def. ſeq.* cujus baſis eſt triangulum vel polygonum quodvis B C D, vertex A, totque cincta triangulis, quot plani anguli componunt ſolidum A. Jam vero quia *per præc.* in ſolido ad baſin angulo B ſunt plani ang. A B D + A B C > D B C tertio, & ſic de cæt. Erunt omnes dictorum triangulorum anguli ad baſin ſimul ſumpti omnibus ſimul planis angulis baſeos D *B C*, *B C D*, *C D B*, majores; ſed *per* 3. 3. anguli baſeos una cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos quot ſunt latera; & ijdem una cum angulis planis ſolidum angulum A continentibus faciunt bis tot rectos quot ſunt baſeos latera: Erg. quatuor recti ſunt majores omnibus ſimul angulis planis ſolidum angulum A conſtituentibus. Q. E. D.

SCHOL.

Hinc patet corpora regularia (*vid.* 5. *d.* 7.) contineri tantum poſſe vel ſub 4, 8 aut 20 trigonis, vel 6 quadratis, vel 12 pentagonis; ac proinde 5 tantum eſſe numero; quod ſic oſtenditur.

Tres anguli hexagonici non componunt angulum ſolidum; utpote 4 rectos faciunt, (unus enim *per* 3. 3. continet $\frac{4}{3}$ ang. recti) Nedum tres anguli cujuſvis polyoni hexagono majoris, ut heptagoni &c. Reſtant igitur trigonum, quadratum & pentagonum.

Sic ex 3 angulis trigonicis fit ſolidus angulus tetraedri: utpote tantum 2 rectos ſimul facientibus. Ex quatuor, angulus Octaedri; quippe tantum $\frac{8}{3}$ rect. facientibus. Ex quinque, angulus icoſaedri: utpote tantum $\frac{10}{3}$ rect. facientibus;

facientibus; è ſex vero nullus, tot enim ſimul faciunt $\frac{12}{3}$ ſeu 4 rect.

*E*x tribus quadraticis fit ang. hexaedri, quippe 3 rectos facientibus; *E*x 4 vero nullus, utpote 4 rectos continentibus.

E tribus denique pentagonicis fit ang. dodecaedri; quippe $\frac{18}{5}$ ſeu $3\frac{3}{5}$ rectos continentibus; ex quatuor vero nullus; utpote $4\frac{4}{5}$ rectos facientibus.

LIB.

L I B. VII.

De Solidis Rectilineis.

Definitiones.

1. PRiſma eſt ſolidum duo adverſa plana habens parallela ſimilia & æqualia, reliqua vero parallelogramma. Fig. 7.

2. Si hujus plana ſint numero ſex, quorum bina oppoſita ſemper ſunt parallela; dicitur Parallelipipedum. Fig. 13.

3. *Et* ſi omnia parallelipipedi plana ſint quadrata; dicitur Cubus. Ut alea.

4. Pyramis vocatur, quod continetur ſub triangulis eidem plano C D B inſiſtentibus & communem verticem habentibus. Fig. 12.

Pyramis eſt omnium ſolidarum ſimpliciſſima, ſi triangularem habeat baſin. In eam reſolvi poſſunt reliqua ſolida rectilinea.

5. Quinque corpora vulgo Regularia ſunt Hexaedrum ſeu Cubus. Tetraedrum ſub 4 triangulis æquilateris & æqualibus contentum. Octaedrum, ſub 8. Icoſaedrum, ſub 20. dodecaedrum, ſub 12 ordinatis pentagonis æqualibus.

THEOR. I. E. 24. 11.

Fig. 13. *Parallelipipedi oppoſita plana B D, F H ſunt parallelogramma ſimilia & æqualia.*

Planum A F ſecans plana *B* D, F H, facit *per* 3. 6. A *B* || F E: Et ſecans plana A H, *B E*, facit A E || *B F*; ideo *B E* eſt pgr. & ſic de cæt. Cum igitur ſit *AB* || *FE*, & *BC* = *FG*; erit *per* 8. 5. ang. *ABC* = *EFG*: propter quod, & *AB* = *EF*, *BC* = *FG*, ideoque

ideoque *AB* : *BC* : : *EF* : *FG*, erunt *per* 28. 3. *&* 1 *part*. 10. 3. triang. *ABC*, *FEG*, æqualia & ſimilia, ac proinde ipſa pgr. *BD*, *FH*. & ſic de cæt. Q. E. *D*.

THEOR. 2. E. 25. 11.

Fig. 14. *Si parallelipipedum, aut priſma, ſecetur plano planis oppoſitis parallelo DC; Erit ut baſis ad baſin, ita ſolidum ad ſolidum. BC : CF : : GE : AG.*

Nam baſe BC in quotcunque aliquotas diviſâ per lineas II, & per has lineas ductis planis plano DC parallelis, fient tot æqualia ſolida quot pgra IC; (utpote totidem æqualibus & ſimilibus planis contenta) Erg. quoties IC auferri poteſt à CF, toties ſolidum ſuper IC à ſolido AG auferri poteſt. Igitur *per* 13. 1. eſt BC : CF : : EG : AG. Q. E. D.

THEOR. 3. E. 28. 11.

Fig. 13. *Planum per adverſa parallelipipedi plana diametraliter tranſiens, idem ſecat in duo priſmata æqualia. AGF, AGD.*

Per 14 *def*. 1. Sunt AE & CG || BF; ideo *per* 7. 5. eſt AE || CG; ſed has jungunt AC & EG; ideoque *per* 11. 2. eſt AC = & || EG Erg. eſt AG pgr. Inſuper æqualia BD & FH *per* 7. 3. biſecantur per AC & EG; igitur inde fiunt duo priſmata AGF & AGD contenta æqualibus ſimilibuſque triangulis & parallelogrammis, utpote oppoſitis. Erg. ſunt æqualia. Q. E. D.

THEOR. 4. E. 29. & 30. 11.

Fig. 15. *Parallelipipeda æque alta ſuper eadem baſe, ſunt inter ſe æqualia. Idem de priſmatibus.*

1. Caſ. In *pdis* DG, & EL, rectæ communi baſi EG inſiſtentes incidant in eaſdem plani oppoſiti lineas DK & FL. Nam ſi ex æqualibus priſmatis ADIM,

CGKL

CGKL auferatur commune priſma PCINBM, & addatur utrinque ſolidum PGEA, erit per 3. ax. 1. ppd. DG = EL. Q. E. D. Fig. 16.

2. Caſ. In Ppdis GD & DK, rectæ communi baſi BD inſiſtentes incidant in diverſas plani oppoſiti paralleli lineas; viz. inſiſtentes ppdi GD cadant in GF & HE, ppdi vero DK in KL & IM. Cum ex hyp. ſint GE & KM in eodem plano, producantur LM & KI uſque ad P & O: Item GF & HE ad N & O, ducanturque Bq & CN, Item AP & DO. Unde per 1 part. ppd. BO = DG, (utpote in utroque lineæ communi baſi inſiſtentes cadunt in eaſdem lineas GN & HO) ut & ppd. BO = DK, (utpote in utroque lineæ communi baſi inſiſtentes cadunt in LO & KP) Erg. eſt ppd. DG = DK. Q. E. D.

Quod in hac & ſequentibus dicitur de priſmatis, patet ex 3. huj. Nam priſma trigonum eſt dimidium ſui ppdi; & polygonum in trigona reſolvi poteſt. Vid. Fig. 17.

SCHOL.

Cum quodvis priſma rectum producatur ex ductu baſis in altitudinem; huic autem æquetur quodvis obliquum ſuper eadem baſe conſtitutum: patet cujuſcunque priſmatis dimenſio ex hoc Theor.

THEOR. 5. E. 31. 11.

Fig. 18. *Parallelipipeda æquè alta ſuper æqualibus baſibus EG, AO, ſunt inter ſe æqualia. Idem de Priſmatis.*

1. De ppdis rectis. Ad FG productam fiat pgr. GK æquale ac ſimile AO: perfectòque pgr. GP, rectæ PM, RG, occurrant KH in Q & L. Jam verò intelligantur ſuper GK, Gq, GP, conſtitui ppda recta quorum altitudo ſit S. Erit per 2. 7. EG : GP :: EGS : GPS; & EG (= AO = GK = Gq) : GP :: GQS : GPS: unde EGS : GPS :: GQS : GPS, atque ſit EGS = GQS, h. e. per 4. 7. GKS vel AOS. Nam

crit

&

unt

is,

Fiat F E = A B, Item N M. G K. X ∺; unde *per* 35. 3. A M : F K :: N M : X. Et fiat B A (= E F) : F C :: X : Z; Erg. æqualibus rationibus per æquales rationes multiplicatis, rationes inde compoſitæ *per cor.* 21. 1. erunt æquales, ſcil. rat. A M : *F K* × A B : F C = N M : X × X : *Z*, h. e. *per* 22. 1. N M : Z; ſed *per* 6. 7. eſt ppd. *B* M : E K :: A M : *F K*, *b. e. ut jam prob.* N M : X, *Et* ppd. E K : C K :: *E F* : *C F*, vel, *ut ſupra*, X : *Z*; *Erg. ex æquo*, eſt ppd. B M : C K = N M : Z, *b. e. ut jam prob.* A M : *F K* × A B : *F C.* Q. *E. D.*

THEOR. 9. F. 33. 11.

Fig. 20. *Similium parallelipipedorum ratio eſt triplicata rationis laterum homologorum.* (*pdum B M* : *E K* = *N M* : *G K ter*) *Idem de Priſmatis.*

Per 33. 3. eſt pgr. A M : F K = A I : O F bis, *& per* 4 *def.* 3. A B : E F = A I : F O; (ſupponatur A B > E F) ideoque A M : F K = A *B* : E F bis; ſed *per præc.* eſt ppd. B M : E K = A M : F K × A B : E F; Erg. eſt ppd. B M : E K = A B : E F ter. Q. E. D.

THEOR. 10. E. 36. 11.

Fig. 21. *Parallelipipedum D H ex tribus proportionalibus E F, E G, E D factum, æquatur parallelipipedo æquilatero I N ſub media E G vel L X ſed æquiangulo priori. Idem de Priſmatibus.*

Ex hyp. & conſtr. recriprocè eſt E F : L X :: I X : D F, ideo *per* 30. 3. eſt baſ. D F = I L. Inſuper, ſi ang. ſol. E & X intra ſe invicem ponantur (propter æquales angulos planos quibus continentur) congruent; & ob E G = X M, coincident M & G, atque ſic ſunt D H & I N æquè alta: ſed (*ut jam*) eſt D F = I L. Erg. *per* 5. 7. eſt D H = I N. Q. E. D.

SCHOL. *Hic Not. Ex tribus lineis quomodocunque inter ſe ductis, ejuſdem magnitudinis ſolida gigni, A B C. C A B. B C A.*

In his ſolidis duæ primæ literæ deſignant baſin, tertia altitudinem. Comparemus primum cum ſecundo. *Per* 24. 3. eſt baſ. A B : C A :: B : C; *h. e.* reciprocè ut alt. B ad alt. C. Erg. *per* 7. 7. eſt A B C = C A B. Similiter oſtenditur primum tertio, & tertium ſecundo eſſe æqualia.

THEOR. 11. E. 37. 11.

Parallelipipeda ſimilia ſimiliterque deſcripta ſuper quatuor lineas proportionales, ſunt proportionalia. Et contra. Idem de Priſmatibus.

Nam per 9. 7. *ppdorum* rationes ſunt triplicatæ rationum inter lineas; ideoque *per cor.* 21. 1. ſunt æquales inter ſe: *Et* ſi ſint æquales inter ſe, tunc rationes inter lineas ſunt æquales.

THEOR. 12. E. 40. 11.

Si baſis parallelogramma priſmatis trigoni dupla fuerit baſeos triangularis in priſmate trigono æquè alto; Priſmata erunt æqualia.

Nam ſi perficiantur parallelipipeda, ob baſium æqualitatem, ut & altitudinum, erunt *per* 5. 7. hæc æqualia; ideoque & ipſa priſmata, utpote *per* 3. 7. iſtorum dimidia.

LEM. 1. Tacq.

Fig. 22. *Si duæ pyramides trigonæ ſecentur planis ad baſes parallelis, quæ dividant latera (in E & Z) proportionaliter; Erunt interſectiones inter ſe ut baſes. (O S E : R X Z :: A B C : I V Q.)*

Ex hyp. à pyramidis planis ſecantur parallela plana O S E, A B C, unde *per* 3. 6. eſt S E || B C, O S || A B, O E || A C; ideo *per* 3. 5. ang. O S E = A B C, S O E = B A C, O E S = A C B: quare *per* 26. 3. ſectiones triangulares O S E, A B C ſunt ſimiles. Similiter ſectiones R X Z, I V Q ſunt ſimiles. Erg. *per* 33. 3. triang. A B C : O S E = B C : S E bis; & triang. I V Q : R X

R X Z = V Q : X Z bis. atqui eſt B C : S E = V Q : X Z, (eſt enim *per* 26. 3. B C : S E : : C F : E F, *h. e. ex hyp.* : : Q L : Z L, *h. e. ex hyp.* : : V Q : X Z) ideoque eſt B C : S E bis = V Q : X Z bis; ſed (*ut ſtatim Prob.*) eſt B C : S E bis = A B C : O S E, ideoque A B C : O S E = V Q : X Z bis, *h. e. per* 33. 3. = I V Q : R X Z. Q. E. D.

LEM. 2. Tacq.

Fig. 23. *Priſmata pyramidi trigonæ in infinitum inſcripta, in eam deſinunt.*

Pyramis ſecetur planis baſi parallelis & latus A F in partes æquales dividentibus, eique intelligantur inſcripta & circumſcripta eſſe priſmata trigona M E B A, C I B A, &c. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt ſolida I M, X K, H G, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati C I B A; Atqui A F per continuam bipartitionem diviſa, ac proinde priſmatum numerò in infinitum multiplicato, A B fiet quavis lineâ aſſignabili minor, *per Lem.* 13. 1. & priſma C I B A quovis ſolido dato minus, (quod patet ex 2. 7.) Erg. priſmatum circumſcriptorum (multòque magis ipſius pyramidis Z C A F) exceſſus ſupra inſcripta fiet quovis dato minus; Erg. *per* 9 *def.* 4. inſcripta in pyramidem deſinunt. Q. E. D.

THEOR. 13. E. 5. 12.

Pyramides trigonæ æquè altæ, ſunt inter ſe ut baſes.

Utrique pyramidi inſcripta eſſe intelligantur quotcunque priſmata trigona æquè multa & æquè alta: *Per* 1 *lem.* patet, horum baſes eſſe inter ſe, ut ipſarum pyramidum baſes; utpote ijs parallelas: Et *per* 6. 7. ſingula priſmata unius pyramidis ſunt ad ſingula alterius, ut iſtorum baſes ad horum baſes, *h. e.* (ut dictum) ut baſis unius pyramidis ad baſin alterius: Ergo *per* 8. 1. ut omnia ſimul priſmata unius ad omnia ſimul alterius, ita baſis unius pyramidis ad baſin alterius; Quare cum ea *per* 2. *lem.* deſinant in ipſas pyramides, etiam ipſæ *per* 3. *l.* 30. 4. erunt inter ſe ut baſes. Q. E. D.

THEOR. 14. E. 7. 12.

Fig. 24. *Pyramis eſt tertia pars priſmatis (A B C D F E) eandem baſin & altitudinem habentis.*

1. De pyr. trigona, Ducantur pgrorum diametri A C, C F, F D. *Per* 7. 3. eſt triang. A C B = A C D, Erg. *per præc.* æquè altæ pyr. A C B F, A C D F æquantur. Eodem modo eſt pyr. D F E C = D F A C eidem cum A C D F; Erg. tres pyr. A C B F, A C D F, D F E C, in quas diviſum eſt priſma, ſunt æquales; ſed pyramis quæcunque trigona eandem A B F baſin & altitudinem habens cum pyramide A B C F (conſequenter cum priſm. A B C D F E ſeu A B F D C E eodem) eſt æqualis *per præc.* eidem A B F C; ideoque eſt tertia pars priſmatis. Q. E. D.

2. Patet de pyr. polyg. (*vid.* 17. *Fig.*) quæ v. g. baſin habeat B E & alt. B H; Nam hæc in tres pyramides trigonas, ſicut ipſum priſma polygonum in totidem priſmata trigona, reſolvi poteſt. ſed *per* 1 *part.* ſingulæ pyramides trigonæ ſunt tertiæ partes ſingulorum priſmatum polygonorum; proinde pyramis polygona priſmatis ſui. Q. E. D.

SCHOL.

Hinc elicitur pyramidis dimenſio, quantitatem baſis per trientem altitudinis multiplicando.

Item quatuor ex corporibus regularibus; Nam Tetraedrum eſt pyramis ordinata. Octaedrum conflatur ex duabus pyramidibus ſimilibus & æqualibus baſin quadratam habentibus communem, & quarum altitudo eſt dimidia diſtantia duorum quorumvis angulorum oppoſitorum. Dodecaedrum conflatur ex 12 pyramidibus pentagonis ſimilibus & æqualibus centrum ſolidi pro communi vertice habentibus, & quarum altitudo eſt dimidia diſtantia duorum quorumvis dodecaedri planorum oppoſitorum. Icoſaedrum ex 20 trigonis pyramidibus ſimilibus & æqualibus, quarum vertex & altitudo ſunt ut in dodecaedro. Quod ad hexaedrum, eſt parallelipipedum ordinatum.

THEOR. 15. E. 6. 16.

Pyramides quæcunque æquè altæ, ſunt inter ſe ut baſes. Et quæ æquales habent baſes, ſunt ut altitudines.

THEOR. 16. E. 9. 12.

Æquales pyramides reciprocant baſes & altitudines. Et è contra.

THEOR. 17. E. 8. 12.

Similium pyramidum ratio componitur ex rationibus baſium & altitudinum. Item, eſt triplicata rationis laterum homologorum.

Hæc tria patent, cum *per* 14. *huj.* pyramides ſint tertiæ partes ſuorum priſmatum, quibus (*per* 6. 7. 8. & 9. *huj.*) conveniunt quæ in his affirmantur de pyramidibus.

14 LIB.

L I B. VIII.

De Solidis Circularibus.

Definitiones.

1. SI à ſublimi puncto A recta AC circumferentiam circuli decurrat, Conum deſcribet. Illa recta dicitur Coni latus: Circulus ille, Baſis. Et recta A O à vertice ad hujus centrum, Coni axis. Hic eſt baſi perpendicularis, vel non; unde conus vocatur rectus vel obliquus. Similiter Cylindrus. Fig. 1.

2. Si circa duos circulos parallelos moveatur recta A B rectæ centra circulorum connectenti O I ſemper parallela; Cylindrum deſcribet. Prior recta dicitur Cylindri latus: altera, Axis. 2 Fig.

3 Coni, item cylindri, dicuntur ſimiles; quorum axes ſunt baſium diametris proportionàles, æqualiterque inclinati.

4. Sphæra eſt ſolidum unica ſuperficie contentum, ad quam omnes rectæ ductæ ab uno puncto interno (Centrum dicto) ſunt æquales. Concipitur produci per circumvolutionem ſemicirculi circa diametrum quieſcentem, quæ vocatur Sphæræ axis.

L E M. .Tacq.

Fig. 31. *Lib.* 4. *Pyramides & priſmata, quæ conis & cylindris in infinitum inſcribuntur, in conos & cylindros deſinunt.*

Si coni & cylindri baſibus polygona ſine fine inſcribantur, hæc tandem *per* 2. *Lem.* 30. 4. in eas deſinent. Item priſma ſuper F E H G eſt dimidium priſmatis ſuper A C, *per* 6. 7. quod ſi auferatur à cylindro ſuper circulum *F H*, relinquetur minus quàm dimidium, ſcil. æquè alta ſolida

ſolida ſuper ſegm. E L F & ſimilia: & ſi ab hoc reſiduo auferantur priſmata æque alta ſuper triang. E L F & ſimilia, (quæ ſunt majus reſidui dimidio) & ſic deinceps; tandem pervenitur ad cylindri & priſmatis inſcripti differentiam ſolido quovis aſſignato minorem, *per lem.* 13. 1. *h e.* priſma deſinit in cylindrum. 9 *def.* 4. Similiter prorſus in conum deſinit pyramis inſcripta. Q. E. D.

Hinc & ex 3 *lem.* 30. 4. Patent tria ſequentia.

THEOR. 1. E. 10. 12.

Conus eſt tertia pars cylindri eandem baſin & altitudinem habentis.

THEOR. 2. E. 11. & 14. 12.

[1] *Coni, & cylindri, æquè alti, ſunt inter ſe ut baſes.* [2] *Item, Qui æquales habent baſes, ſunt inter ſe ut altitudines.*

THEOR. 3. E. 12. 12.

[1] *Similium conorum, ſimiliumque cylindrorum ratio componitur ex rationibus baſium & altitudinum.* [2] *Item, Eſt triplicata rationis diametrorum in baſibus.*

Ad 2 part. huj. Not. diametros baſium circularium eſſe inter ſe, ut latera homologa ſimilium polygonorum ijs inſcriptorum. Nam *per* 33. 3. polygona ſimilia ſunt in duplicata ratione laterum homologorum; & baſes circulares, æquè ac ſimilia polygona ijs inſcripta, ſunt in duplicata ratione diametrorum, *per* 1 *lem.* 30. 4. & 30. 4.

THEOR. 4. F. 15. 12.

Æquales coni, æqualeſque cylindri, reciprocant baſes & altitudines. Et è contra.

Pyramides & priſmata conis & cylindris in infinitum inſcripta,

inſcripta, in eos deſinunt, ſicut eorum baſes in horum baſes, *per lem.* 1. 8, *&* 2 *lem.* 30. 4. Erg. *per* 3 *lem.* 30. 4. conus eſt ad cylindrum, ut pyramis ad priſma: Item coni inter ſe, ut pyramides inter ſe; cylindri ut priſmata. Ac proinde quæ conveniunt pyramidibus & priſmatis *per* 14. 7, 15. & 6. 7, 17. & 8. & 9. 7, 16. & 7. 7. conveniunt etiam conis & cylindris, ſicut in his quatuor propoſitionibus affirmatur.

COR. *Theoremata hæc* 2, 3, *&* 4 *ſimiliter concludunt de corporibus cylindriformibus*; h. e. *quæ fiunt à cujuſcunque plani motu parallelo normaliter aut obliquè facto.*

SCHOL. *Ex* 1 *&* 2 *Theor. Patet cylindros, imo corpora quæcunque cylindrica, menſurari ut priſmata; & conos ut pyramides.*

LEM. Tacq.

Fig. 3. *Cylindri hemiſphærio inſcripti, in ipſum deſinunt.*

Semicirculo P Z Y inſcribantur & circumſcribantur rectangula quotcunque æquè alta, O R, E H, & *F T*, L B, Q D. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta æquatur rectangulo *F T*. Si jam ſemicirculus cum ſuis rectangulis circa axem A *Z* moveatur; inſcripta producent cylindros hemiſphærio inſcriptos: circumſcripta circumſcriptos ſibi mutuò inſiſtentes: & cylindrorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcriptos æquabitur cylindro ex *F T* genito. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis datâ minor, adeoque etiam ipſe *per* 2 *part.* 2. 8. quovis dato evadet minor, ſi radio in plures partes diviſo, rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus ſine fine multiplicetur. Erg. Cylindrorum circumſcriptorum, multòque magis ipſius hemiſphærij, exceſſus ſupra inſcriptos fiet tandem quovis dato minor. Erg. hi cylindri *per* 9 *d.* 4. tandem deſinunt in hemiſphærium. Q. E. D.

THEOR.

THEOR. 5. E. 18. 12.

Fig. 4. *Hemiſphæriorum (aut ſphærarum) ratio eſt triplicata rationis diametrorum B K, R Z. Item. Compoſita ex rationibus baſium & altitudinum.*

Per cor. 15 4. Sunt K C, F C. C B ∺ ideo *per cor.* 22. 1. K C : C B = F C : C B bis. ſimiliter eſt Z E : E R = X E : E R bis; Erg cum *ex conſtr.* ſit K C : C B :: Z E : E R, erit (2 *ax.* 1.) F C : C B bis = X E : E R bis. Erg. *per* c. 21. 1. F C : C B vel C O : : X E : E R vel E S; *h. e. per* 3 *d.* 8.) cylindri F L & X Q ſunt ſimiles : ac proinde *per* 3. 8. F L : X Q = F I : X V ter = F C : X E ter; ſed (*ut jam Prob.*) eſt F C : X E : : C B : E R, *h. e.* (*per* 1. *c.* 5. 1.) K B : Z R; Erg. *per cor.* 21. & 2 *ax.* 1. F L : X Q = B K : R Z ter. Eodem modo probari poteſt ſingulos cylindros unius hemiſphærij eſſe ad ſingulos alterius in triplicata ratione B K ad R Z; ideoque *per* 8. 1. ratio ſimul omnium ad omnes ſimul eſt triplicata rationis B K : R Z; Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria deſinant, *per lem. huj.* Hemiſphæriorum, ac proinde ſphærarum, ratio erit triplicata rationis B K : R Z. Q. E. D. 1°.

2. Pars. Hemiſphæria dicantur h & H, eorum baſes circulares c & C. Jam prius prob. eſſe h : H = B K : Z R ter, vel B K : Z R bis × B K : Z R : ſed *per* 30. 4. eſt c : C = B K : Z R bis. Erg *per* 2. *ax.* 1. eſt h : H = c : C × B K : Z R, vel c : C × A K : Y Z. Q. E. D. 2°.

C O R. Fig. 5. *Theorema hoc cum lemmate ſimiliter concludunt de conoidibus quibuſcunque,* h. e. *quæ fiunt ex circumvolutione figuræ P A Y circa ſuum axem A Z, qualia, præter hemiſphærium & quodvis ſphæræ ſegmentum, ſunt conoidea parabolica, elliptica & hyperbolica.*

Not : Iſtas curvas hic vocari ſimiles, quarum ſimiles ſagittæ ſunt ſuis ordinatis proportionales; ut in 4 *Fig.* B C : F C : : R E : E X. Et quæ conoidea ex iſtiuſmodi curvis gignuntur dici ſimilia.

PROBL.

PROBL. 1. *Cognita ratione linearum homologarum in ſimilibus ſolidis, (hoc & præcedente libro explicatis, aut quæ ex iis componuntur) Ipſorum rationem invenire.*

Ut ſi ſphærarum diametri ſint 1 & 10, continuetur ratio ad quatuor terminos 1. 10. 100. 1000; Erit ſphæra diametri 1 ad ſphæram diametri 10, ut 1 ad 1000. Nam *per hoc th.* eſt ſph. Diam. 1 : ſph. diam. 10. = 1 : 10 ter, & 1 : 1000 = 1 : 10 ter, *per cor.* 22. 1. Fig. 6.

PROBL 2. *Similia ſolida augere vel minuere in ratione data.*

Ut ſi ſphæræ cujus diameter eſt A, quæratur alia iſtius octupla, quæ dicatur R, *h. e.* ut ſit ſph. A : R : : A : B; Inter terminos rationis datæ A & B inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z; atque ſic X eſt diameter ſphæræ quæſitæ R. Nam cum *ex conſtr.* ſit A : X : : Z : B, erit ſph. A : ſph. X = A : X ter = A : B, *per* 5. 8, *& cor.* 22. 1.

APPENDIX.

APPENDIX.

De Figurarum Elementarium, ſphæræ præſertim, dimenſione, per methodum Indiviſibilum facillimam, in eorum gratiam præcipuè quibus libri undecimus & duodecimus *Euclidis* ſunt tædio.

PEr *Indiviſibile* hic non intelligitur ullius extenſi terminus, aut quid propriè tale; ſed particula indefinitè parva, ſeu minor quàm quæ ab intellectu creato concipi poteſt. Nam in hac methodo, quævis linea, licet curva, ex rectulis parvitate & numerô infinitis concipitur conflata: figura plana ex parallelogrammis latitudinis indefinitè parvæ (quaſi telum ex filamentis) & ſolidum ex priſmatis aut cylindris altitudinis indefinitè parvæ (quaſi liber ex folijs) & baſi parallelis.

Planorum & corporum particulæ hujuſmodi ſeu elementa vel ſunt omnia inter ſe æqualia, ut in parallelogrammo & priſmate, quæ proinde figuræ vocantur integræ: Vel à puncto ſeu vertice indeſinenter creſcunt, ut in triangulo & pyramide, quæ ideo creſcentes dicuntur figuræ. Horum numerus eſt indefinitus numerus æqualium particularum altitudinis, ſeu figuræ altitudo; ſicut eorum ſumma eſt ipſa figuræ quantitas. Hæc nec augeri nec minui cenſetur per acceſſum aut deceſſum unici elementi, utpote propter parvitatem ſuam infinitam pro nihilo habendi. Ut habeatur ſumma, notetur Theorema ſeq.

LEMMA.

* *Series quantitatum à nihilo creſcentium in ratione numerorum ſeriei naturalis, (v. g. 0. A. 2A. 3A. 4A. &c.) eſt ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut* 1 *ad* 2. * *Sed infinita*

infinita ſeries quantitatum à nihilo creſcentium in duplicata ratione (ſeu ut quadrata) numerorum ſeriei naturalis v. g 0. A^2. $4A^2$. $9A^2$ *&c.*) *eſt ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut* 1 *ad* 3.

In ratione triplicata (*v. g.* 0^3. A^3. $8A^3$. $27A^3$. *&c.*) *eſt ut* 1 *ad* 4. *Et ſic deinceps.*

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+2}{2+2+2}=\frac{3}{6}$$

$$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3}=\frac{6}{12}$$

Primum patet ex Arithmetica, præterquam quod inductione probatur in appoſitis ſeriebus, ubi ratio in infinitum ſemper erit ſubdupla.

Secundum probatur ex ſequentibus quadratorum ſeriebus, inductione factâ, ubi ratio proveniens ſemper habetur major quam 1 : 3; exceſſus autem ſupra ſubtriplam perpetuò decreſcit prout numerus terminorum augetur; puta 1 : 6, 1 : 12, 1 : 18, 1 : 24, 1 : 30, &c. Nam eſt ratio 1 : 2 = 3 : 6, 5 : 12 = 4 : 12 + 1 : 12, 7 : 18 = 6 : 18 + 1 : 18, 9 : 24 = 8 : 24 + 1 : 24.

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{14}{36}\text{ h. e. }\frac{7}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{30}{80}\text{ h. e. }\frac{9}{24}$$

Cum autem creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationem ſubtriplam ita continuò minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat; ſi in infinitum procedatur, prorſus evaneſcet. Erg. ratio infinitæ ſeriei dictarum quantitatum ad ſeriem totidem maximæ æqualium eſt ut 1 ad 3. Et ſic deinceps de ſeriebus infinitis aliarum poteſtatum.

THEOR.

THEOR. I. Eucl. & Arch.

Fig. 7. 1 *Triangulum eſt dimidium rectanguli æquè alti ſuper eadem baſe.* 2 *Circulus item rectanguli ſub radio & peripheria.* 3 *Superficies coni recti dimidium rectanguli ſub latere & circumferentia baſis.*

Primum patet. Nam trianguli elementa O O (quoniam inter ſe ut ſuæ baſes, *per* 14. 3.) ſunt inter ſe ut ſuæ altitudines A O, ſeu diſtantiæ à vertice A, *per* 26. 3. Erg. ſunt inter ſe ut numeri 0, 1, 2, 3, 4, &c. æquè ac ipſæ A O; Ideoque *per* 1 *part. lem.* eorum ſumma ſeu ipſum triangulum eſt dimidium totidem elementorum elemento ſuper baſe B C æqualium, ſeu rectanguli æquè alti ſuper B C

Perinde eſt ſive triangulum fuerit rectilineum, ſive luxatum ut in 8 Fig. Nam tali diſtortione non quantitas ſed ſitus elementorum mutatur.

Secundum patet, ſi poſita circumferentiâ pro baſe & radio pro altitudine, ſupponatur circulus conflari ex infinitis numerô circumferentijs (aut potius coronis latitudinis infinitè parvæ) Nam ſunt hæ ut ſuæ radij, *i. e.* ut 0, 1, 2, 3, 4, &c. Idem de ſectore.

Tertium item patet de ſuperficie coni recti, poſitâ circumferentia baſis coni pro baſe ſuperficiei, & latere coni pro altitudine: ſic circumferentiæ circulorum baſi parallelorum (exiſtentes inter ſe ut ipſarum, diametri, *per* 35. 4. ideoque inter ſe ut ipſarum diſtantiæ à vertice coni, *per* 26. 3. erunt ſuperficiei conicæ elementa in ratione ſeriei 0, 1, 2, 3, 4, &c.

Similiter; quia in parabola (*vid.* 5 *Fig.*) quadrata ordinatarum O E ſunt inter ſe ut ſagittæ O E (per eſſentialem curvæ hujus proprietatem) erunt circuli earundem O E inter ſe ut ſagittæ, ſcil. ut 0, 1, 2, 3, 4 &c. ſed ſi parabola vertatur circa axem A Z, inde naſcetur conoides parabolicum cujus elementa ſunt circuli (aut potius cylindri altitudinis infinitè parvæ) ab ordinatis: horum igitur aggregatum ſeu conoides erit dimidium ſuæ figuræ integræ ſeu cylindri æquè alti ſuper P Y.

Not

Not. In hac methodo baſes elementorum pro ipſis uſurpari, quoniam ſunt inter ſe ut ipſa elementa, *per* 14.3.

THEOR. 2. E. 7. & 10. 12.

Pyramis priſmatis, conus cylindri eſt tertia pars.

Prius patet. Nam pyramidis elementa ſunt infinita numerò triangula (aut potius priſmata altitudinis infinitè parvæ) baſi ſimilia & parallela; quæ quoniam ſimilia, ideo ſunt in duplicata ratione laterum homologorum, *per* 33. 3. ac proinde laterum pyramidis inter ipſa & verticem, *per* 26. 3. Ergo etiam altitudinum ſeu diſtantiarum à vertice, (patet enim plana parallela ſecare pyramidis altitudinem & latus in eadem ratione) Erg. *per* 2. *part. lem.* ſumma elementorum pyramidis, ſeu ipſa pyramis eſt tertia pars ſui priſmatis.

Item patet de cono; Nam circuli, elementa coni, ſunt in duplicata ratione diametrorum, ac proinde altitudinum.

Similiter in ſemiparabola (*vid.* 11 Fig.) ſagittæ A D, A D, &c. Sunt inter ſe ut quadrata ordinatarum O D; ſeu complementi elementa T O T O &c. Sunt inter ſe ut quadrata alitudinum A T, A T, &c. hic *ex hyp.* exiſtentium ut 0. 1. 2. 3. 4. &c. *h. e.* ſunt inter ſe ut 0. 1. 4. 9. 16. &c. Ideo *per* 2 *part. th.* eorum ſumma ſeu ſemiparabolæ complementum A T O eſt tertia pars rectanguli habentis altitudinem A T & baſin O T; ac proinde ipſa ſemiparabola A D O eſt ejuſdem duæ tertiæ.

Reliquorum theorematum demonſtrationes ſequentes hac methodo traditæ habentur à D. Iſaaco Barrow, & ad captum tyronum hic accommodantur.

THEOR. 3. Archim.

Fig. 10. *Sphæra continet duas tertias cylindri circumſcripti.*

A T dicatur *a* Altitudo ſegmenti ſphærici A E, ſeu numerus

numerus elementorum ſegmenti quod producitur per converſionem figuræ Z A Y E circum A E, dicatur n.

$$\textit{Per 4.}\left\{\begin{array}{l} Aq = A \times AT = o \times d - o = od - o^2 \\ BZq = AB \times BT = a \times d - a = ad - a^2 \\ CZq = AC \times CT = 2a \times d = 2a = 2ad - 4a^2 \\ DZq = AD \times DT = 3a \times d - 3a = 3ad - 9a^2 \\ EZq = AE \times ET = 4a \times d - 4a = 4ad - 16a^2 \end{array}\right.$$

h. e. quadrata radiorum $\frac{1}{2}$ Z Y eſſe inter ſe ut $od - o^2$, $ad - a^2$, $2ad - 4a^2$. &c. ſed *per* 1 *part. lem.* ſumma omnium od, ad, 2 ad, 3 ad &c. eſt $\frac{ndn}{2}$ (dimidium ſcil. maximi termini ſeu elementi n d per terminorum numerum n multiplicati) Et *per* 2 *part. lem.* ſumma omnium o, a, $4a^2$, $9a^2$ &c. eſt $\frac{nnn}{3}$, triens ſcil. maximi termini A E q ſeu n n per n numerum terminorum multiplicati. Quare omnia ſimul quadrata radiorum $\frac{1}{2}$ *Z* Y ſunt $\frac{ndn}{2} - \frac{nnn}{3}$, vel (terminis ad eundem denominatorem reductis) $\frac{3ndn - 2nnn}{6}$; & eorum quadruplum, *i. e.* omnia ſimul quadrata diametrorum *Z* Y erit $\frac{12ndn - 8nnn}{6}$ ſeu $\frac{6ndn - 4nnn}{3}$; ac proinde omnes ſimul circuli diametrorum Z Y (hi quippe ſunt inter ſe ut quadrata) ſeu ſegmentum ſphæricum æquatur cylindro cujus baſis diameter eſt latus quadrati æquantis $6nd - 4nn$, & altitudo eſt $\frac{n}{3}$

Hic cylindrus ſegmento ſphærico æqualis in æqualem cylindrum ſuper ſegmenti baſe ſic *per* 4. 8. transformatur; eſt Z Y q ſeu 4 Z E q *i. e.* $4dn - 4nn$ baſis cylindri quæſiti, ad $6nd - 4nn$ baſin cylindri dati, ſeu (divid. per n) eſt $d - n$ nd $\frac{3}{2}$ $d - n$, ut $\frac{1}{3}$ n ad altitudinem

K

nem cylindri quæſiti. vel in figura ſic faciendo, T E : T E + X A : : $\frac{1}{3}$ E A : S.

Hinc ſi ſegmentum fuerit hemiſphærium, adeoque ſit n = $\frac{1}{2}$ d, tunc cylindrus ſuper eadem baſe cum hemiſphærio, eidemque æqualis pro altitudine habebit $\frac{1}{3}$ d (Nam in hoc caſu eſt d — n = $\frac{1}{2}$ d, $\frac{3}{2}$ d — n = d & $\frac{1}{3}$ n = $\frac{1}{6}$ d; atque ſic eſt $\frac{1}{2}$ d : d : : $\frac{1}{6}$ d : $\frac{1}{3}$) ſed cylindrus toti ſphæræ æqualis habebit $\frac{2}{3}$ d. Erg. *per* 2. 8. continet $\frac{2}{3}$ cylindri circumſcripti.

C O R. *Superficies ſphæræ æquatur quadruplo maximi in ipſa circuli, Vel ipſi ſuperficiei cylindri circumſcripti.*

Circulus maximus dicatur C, ſphæra S, ejus ſuperficies Y, diameter d. Superficies concentricæ ſphæram conflantes, ſicut in ſectore ſphærico, ſunt inter ſe ut o 1. 4. 9. 16. &c. ut patet; unde eſt $\frac{rad.}{3}$ vel $\frac{d}{6}$ × Y = S; ſed eſt $\frac{2\,d}{3}$ vel $\frac{4\,d}{6}$ × C = S (nam duæ trientes diametri ductæ in maximum circulum ſeu cylindri baſem producunt duas trientes cylindri circumſcripti ſeu ipſam ſphæram) ideo eſt $\frac{d\,y}{6} = \frac{4\,d\,c}{6}$, *h. e.* (multiplicando utrumque per 6 & dividendo per d) Y = 4 c.

S C H O L. *Si duæ trientes diametri ſphæræ ducantur in cylindri circumſcripti baſin, ſeu maximum ſphæræ circulum: Aut triens radij in 4plum circuli maximi; producent duas tertias cylindri vel ipſam ſphæram.*

Item Si ſphæræ diameter in ſui circuli vel baſeos cylindri circumſcripti circumferentiam ducatur; Producet ſphæræ vel cylindri ſuperficiem.

Corollarium

Corollarium præcedens perbreve quidem eſt, ſed quoniam adhuc deſunt cujuſvis ſegmenti ſphærici hujuſque ſuperficiei dimenſiones, ut & ſectoris; ideo ſubjiciuntur ſequentia, prout à D. *Barrow* tractantur.

THEOR. 4. Archim.

Sector ſphæricus æquatur cylindro cujus baſis radius eſt recta à vertice ſegmenti ad baſis circumferentiam ducta, altitudo vero triens radij ſphæræ: Vel cono eandem baſem habenti, altitudinem vero radium.

Fig. 10.

Cum quadrata ſint inter ſe ut circuli, inventum in præc. demonſtr. $\frac{6dnn - 4nnn}{3}$ referat ſegmentum ſphæricum per converſionem figuræ ZAYE, circa AE productum. Similiter $\frac{2ddn - 6dnn + 4nnn}{3}$ ſeu $\frac{4EZq \times XE}{3}$ referat conum à triangulo ZXY ſic converſo deſcriptum. (nam ZEq, *h. e.* $d - n \times n$ ſeu $dn - nn$ quater ſumptum facit $4dn - 4nn$, quod ductum in $\frac{d-n}{2}$ ſeu XE facit $\frac{4ddn}{2} \frac{4dnn}{2}$ $- 4dnn + 4nnn$ ſeu $2ddn - 6dnn - 4nnn$ $= 4ZEq \times XE$) Si huic addatur $\frac{6dnn - 4nnn}{3}$, dabitur ſumma $\frac{2ddn}{3}$ referens ſectorem ſphæricum ZXYA, qui propterea æquatur cylindro cujus baſis diameter eſt $\sqrt{dn}$, ſeu ZA, & altitudo $\frac{2}{3}d$; Vel cono ejuſdem baſis & altitudo $2d$, vel etiam cono cujus baſis radius eſt $\sqrt{dn}$ ſeu ZA, & altitudo $\frac{1}{2}d$ ſeu AX.

THEOR. 5. Archim.

Fig. 11. *Superficies cujuſvis ſegmenti ſphærici æquatur circulo cujus radis eſt recta à vertice ſegmenti ad baſis circumferentiam ducta.*

Circuli ſectore Z Y E A circum A Y converſô, infinitè numerô circumferentiæ producunt totidem ſuperficies concentricas ſectorem ſphæricum conſtantes, quæ ob maximam ſimilitudinem ſunt inter ſe ut A B q, A C q, A D q, &c. Vel ut quadrata numerorum 1. 2. 3. 4. &c. unde *per 2 part. lem.* ſector ſphæricus æquatur trienti totidem ſuperficierum maximæ E Z æqualium; ſeu cylindro cujus baſis eſt tertia pars extimæ ſuperficiei ſectoris, & altitudo radius: Vel cono cujus baſis æquatur ſuperficiei ſectoris, & altitudo radius; ſed *per præc.* ſector æquatur cono cujus baſis radius eſt Y E, & altitudo radius ſphæræ: ideoque hi duo coni æquatur, ſicut etiam altitudines; Erg. & baſes, ſcil. ſuperficies ſegmenti E Y Z & circulus radij *Y* E.

THEOR. 6.

Fig. 10. *Superficies ſphæræ æquatur quadruplo maximi in ipſa circuli, ſeu baſeos cylindri circumſcripti.*

Nam eſt $TBq = BXq + TXq = 2BXq$, adeoque circulus radij T B æquatur bis circulo radij *X* B; ideoque *per præc.* ſuperficies hemiſphærij æquatur eidem, & totius ſphæræ ſuperficies æquatur quater circulo radij X B.

His quatuor propoſitionibus ultimis comprehenditur ſcopus Archimedis in libris ſuis de ſphæra & cylindro, quem (cum hemiſphærium ſit ſphæræ ſegmentum, idque dimidium) Clariſs. *D. Barrow* ad hæc duo problemata reducit.

Circulum invenire ſuperficiei ſegmenti ſphærici æqualem.
Conum vel cylindrum invenire ſegmento ſphærico æqualem.

THEOR.

THEOR. 7. Eucl.

Pgra, priſmata & cylindri, æque alta, ſunt inter ſe ut baſes. Item triangula, pyramides & coni. Et è contra.

Patet 1. Nam in duobus Cylindris v. g. æque altis cum idem ſit elementorum numerus, & omnia ſingulorum elementa ſint inter ſe æqualia; duo horum elementorum aggregata, ſeu ipſi cylindri, erunt æquè multiplicia ſuarum baſium. *vid. Not.* 1. *theor.*

Patet 2. Nam triangulum eſt pgri dimidium: & pyramis priſmatis, conus cylindri pars tertia.

Patet Conv. Nam in duobus ejuſmodi elementa ſunt ſingula ſingulis & inter ſe æqualia, & ipſæ altitudines ſunt elementorum numeri.

THEOR. 8. Eucl.

Æqualia pgra, priſmata. &c. reciprocant baſes & altitudines. Et è contra.

Pátet. Nam duo v. g. pgra aut priſmata ſunt æqualium elementorum ſuorum aggregata, producta multiplicando baſes per altitudines: ideoque *per conv.* 4. 1. factores, baſes ſcil. & alitudines reciprocantur. Patet ſimiliter converſa. *ex* 4. 1.

THEOR. 9. Eucl.

Similia plana ſunt in duplicata ratione ſuarum rectarum aut laterum homologorum. Et ſimilia ſolida in triplicata ſuarum.

Patet 1. Nám pgra (propter latera proportionalia) factrices ſuas, baſes ſcil. & altitudines habebunt proportionales; ideoque *per* 23. 1. ſunt inter ſe in duplicata ratione laterum homologorum. Sic etiam triangula, utpote iſtorum dimidia: Item multilatera, ex triangulis

 quippe

quippe compoſita. Ut etiam Circuli, poſito radiô pro altitudine, & circumferentia pro baſe.

Patet 2. Nam priſmatum factrices proportionales ſunt latera baſes continentia & alitudines; in cylindris vero baſium radij & ſemiperipheriæ, & cylindrorum altitudines. Quod ad pyramides & conos, ſunt iſtorum trientes.

De ſphæris item patet; Nam per ſch. *Theor.* 3. harum factrices proportionales ſunt ipſarum circumferentiæ maximæ atque diametri (ex quibus in ſe invicem multiplicatis naſcuntur ſuperficies ſphæricæ) & radij triens.

THEOR. 10. Eucl.

Similium Figurarum ratio X : Z componitur
Fig. 12. *ex rationibus baſium E : C & alitudinum A : B.*

Patet in pgt. v. g. Nam eſt $X = EA$ ſeu E multiplicato per A, & $Z = CB$, ideoque ratio $X : Z = EA : CB$. Item patet de priſm. cylind. pyram. & conis. Item de ſphæris, poſito radiô pro altitudine & ſuperficie pro baſe.

In his quatuor ultimis continentur Eucl. 1. 6, 33. 11, 5. 6, 6. 12, 11. 12, 14. 12, 14. 6, 15. 6, 34. 11, 9. 12, 15. 12, 19. 6, 20. 6, 33. 11, 8. 12, 12. 12, 18. 12. c. 23. 6. & quædam inſuper aliæ.

Logarithmetica

Tractatus
LOGARITHMETICAM
&
TRIGONOMETRIAM

Cum *Planam* tum *Sphæricam* ad captum Tyronum accommodatas Complectens,

In gratiàm Studioſæ Juventutis, *S.* Andreæ *Conſcriptus.*

A GULIELMO SANDERS,
Matheſeos ibidem *Profeſſore* Regio.

GLASGUÆ.

Excudebat *ROBERTUS SANDERS*, Unus è Typographis *Regijs.* Annò 1686.

Antiquæ & Celeberrimæ Univerſitati S. *ANDREÆ.*

ALma Mater, Poſt Elementa Geometrica, noſtri laboris in hac Profeſſione primitias, Paternam Reverendiſſimi Cancellarij noſtri benedictionem & tutelam poſtulantia, Opuſculum hoc, diſciplinæ ordine ſecundum, proinde tyronibus proximè tradendum, Veſtro Nomini Jure dicandum cenſui. Hìc ſummam quam potui brevitatem ſimul ac perſpicuitatem conſului, nè quibus deſtinatur oneri foret aut tædio: Itemque nihil præcogniti, præter jam dicta Elementa & Arithmeticæ vulgaris partem ipſis Bajanis familiarem, ſuppoſui; nequid gratis dictum admitteretur. Elèmentorum libros cum hoc tractatu multis hinc retro annis in gratiam Prolis veſtræ, Bajanis & Semibajanis plenè perdiſcendos, conſcripſi, & nunc pro veſtro velle in lucem edidi: ut inde cum prælectiones publicas comprehendere, tum proprio Marte ulteriùs in hoc ſtudio pergere valeant. In hoc opere nec labori nec ſumptibus, ex ære utcunque alieno quo opprimor, peperci; non obſtante re anguſta domi, præ integro ſtipendio è Regijs hujus Regni Reditibus per quinquennium debito. Utcunque ſi hic labor & ſumptus Veſtra curâ Soboli Veſtræ in emolumentum ceſſerit, quod alibi literarum alumnis ceſſurum probè novi, habeo quod volui; ſin aliàs, operâ licet & oleô perditis officio functum lætabitur.

Veſtri Nominis & Proſperitatis
Amantiſſimus

GULIELMUS SANDERS.

LOGARITHMETICA

A Nobiliſs. Dn. *JOHANNE NEPERO* Merchiſtonij Barone *SCOTO*,

Ad Facilitandas computationes præſertim Trigonometricas, primum adinventa:

Modo facili ac tyronibus aptô hìc tradita.

LOgarithmos hìc loci explicamus, non equidem eoſdem in ſpecie quos ipſe Autor primus in lucem edidit, ſed alios longe utiliores, quos ex ejus præſcripto tunc ſeniò confecti *D. Henr. Briggius* Geometriæ Profeſſor Savilianus apud Oxonienſes conſtruxit.

CAP. I.

De Logarithmorum Natura.

Def. *Logarithmi ſunt numeri æquè differentes proportionalibus adjuncti.*

Pr.	*log.*	*Log.*
1	0	0
2	1	3
4	2	6
8	3	9
16	4	12
32	5	15
64	6	18
128	7	21
256	8	24
512	9	27

SIc in ſchemate, eorundem proportionalium duæ viſuntur logarithmorum ſeries (nam ulla pro arbitrio uſurpari poteſt) quarum utraque ciphram habet pro logarithmo unitatis.

Proportionalis unitati proximus vocatur latus ſeu radix omnium iſtius ſerei; quoniam ex ea aliquoties poſita & in ſe ipſam continuè multiplicata reliqui naſcuntur, quique ideo vocantur ejus Poteſtates

Ex

Ex hac def. & quatuor æquè differentium proprietate; ſcil. *Extremorum ſumma æquatur ſummæ mediorum*, ſequitur.

COR. 1. *Logarithmus producti æquatur ſimul logarithmis multiplicatorum in ſe invicem, quotcunque fuerint.*

Sic in 2da colum. eſt $3+5=8$ log. ipſius 8×32 ſeu 256. Nam *per def. multipl.* eſt 1 : 8 :: 32 : 256, & ex jam dicta æquè differentium, ideoque & logarithmorum, proprietate patet, logarithmos unitatis & producti, *i. e.* ſolius producti (cum log. unitatis ſit 0) æquari ſimul logarithmis multiplicantis & multiplicandi.

COR. 2. *Logarithmus diviſi æquatur ſimul logarithmis diviſoris & quoti. Ac proinde logar. diviſoris ſubductus à log. diviſi relinquit log. quoti.*

Hoc patet ex 1 *cor.* cum factus ex diviſore & quoto ſit ipſe diviſus.

COR. 3. *Logarithmus radicis per indicem multiplicatus æquatur logarithmo poteſtatis. Item logarithmus radicis æquatur logarithmo poteſtatis per indicem diviſo.*

Patet, Si enim velis log. quadrati ex 8, perinde eſt, ſive addas duos logarithmos æquales 3 & 3, ſive multiplices 3 per 2, indicem poteſtatis 2dæ. Et rurſus ſi ſit $2\times3=6$ log. numeri 64, erit 6 diviſus per 2 (indicem radicis quadratæ) $=3$ log. radicis quadratæ numeri 64, ſcil. ipſius 4.

CAP. II.

De Logarithmorum conſtructione.

Series proportionalium quorum ſunt logarithmi huc uſque in uſu, eſt in ratione decupla & ab unitate incipit; ut in ſchem. eorumque logarithmi ſunt 0. 1. 2. 3. &c.

3. &c. quibus interpoſito punctô adjiciuntur quotlibet ciphræ ad arbitrium pro locis decimalibus; ita ut logarithmus ſit numerus mixtus, cujus integer à decimalibus punctô ſeparatus vocatur Characteriſtica. Vel quod idem eſt, logarithmi ſunt integri numeri æquè differentes prædictis 0. 1. 2. 3, &c. proportionales, duobus quibuſvis numeris in ratione decupla ſemper habentibus 10000000 pro differentia ſuorum logarithmorum; ita ut logarithmi omnium numerorum inter 1 & 10 incipiant ab 0; inter 10 & 100 àb 1; inter 100 & 1000 à 2; &c. inter 10000000000 & 100000000000 à 10. Hì numeri 0. 1. 2. 3. &c. quoniam proportionalium ſuorum diſtantiam ab unitate indicant, vocantur Indices vel Characteriſticæ, & à reliquis logarithmorum figuris punctô ſeparantur, oſtendentes numeros ſuos proportionales ſeu abſolutos tot continere figuras, quot ipſæ continent unitates præter unam.

1	0.000000.
10	1.000000.
100	2.000000.
1000	3.000000.
10000	4.000000.
100000	5.000000.
1000000	6.000000.

Quomodo inveniuntur logarithmi numerorum intermediorum inter 1 & 10, 10 & 100, &c. ſequens indicat problema.

PROBL. I.

Numeri cujuſvis integri logarithmum invenire.

Numeri 9 inveniatur logarithmus ſumantur duo numeri, minor & major, ut 1 & 10, quorum logarithmi dantur 0.0000000 & 1.000 0000, iiſque ſeptem aut octo ciphræ interpoſito punctô adjiciantur, ut in tabella ſunt A & B. Itemque ipſi 9, ut fiat 9.0000000.

	Abſolut.	*Logar.*
A	1. 0000000	0. 0000000
C	3 1622777	0. 5000000
B	10. 0000000	1. 0000000
B	10. 0000000	1. 0000000
D	5. 6234132	0. 7500000
C	3. 1622777	0. 5000000
B	10. 0000000	1. 0000000
E	7. 4989421	0. 8750000
D	5. 6234132	0. 7500000

Inter unitatem A & denarium B ciphris ſic auctos invenito medium proportionalem

lem Geometricum C, qui cum ſit minor quam 9 ſeu 9. 0000000, inter eum & majorem B invenito medium proportionalem D; qui cum ſit adhuc minor quam 9. 000 0000, inter eum & proximè majorem B ſimiliter invenito medium E; atque ſic pergas. Quod ſiquis medius ita inventus, v, g. 9. 3057204 excedat 9. 0000000, tunc inter eum & proximè minorem mediorum inventorum invenito adhuc medium Geometricum. Sic inter proximè majorem & proximè minorem ſemper invenias ejuſmodi, medios, tandemque poſt 25 ejuſmodi inventos pervenies ad medium hunc 8. 9999998 à propoſito numero 9. 0000000 inſenſibiliter diſcrepantem, ac proinde eidem æſtimatum æqualem.

Hoc factô, ſicut C eſt medius Geometricus inter A & B; ita 0. 5000000, medius Arithmeticus inter logarithmos numerorum A & B, erit logarithmus medij Geometrici C, *per* 3 *cor. cap. præc.* Hoc pactô reliquorum mediorum Geometricorum logarithmos aſſequi potes, quapropter & ultimi 9, ſcil. 0. 95424250.

PROBL. 2.

Canonem Logarithmorum conſtruere pro numeris integris

1. Log. numeri 9 ſupra inventus eſt 0. 95424250, hujus dimidum 0. 47712125 *per prædict. cor.* eſt logarithmus numeri. 3.

2. Pro log. numeri 2, ſumantur proximè major & proximè minor, Scil. 1 & 3, quorum logarithmi ſunt cogniti; inter eos, quemadmodum inter 1 & 9, inveniantur ſemper media Geometrica, uſque dum fuerit perventum ad medium inſenſibiliter à 2. 0000000 diſcrepans, cujus deinde logarithmus cognoſcetur eſſe 0. 3010300. Atque ſic habentur logarithmi numerorum primorum (*i. e.* quos ſola unitas metitur) 1, 2, 3, conſequenter & numerorum 4 & 6; *per* 1 *cor. præc.*

Non aliter inveniri poſſunt logarithmi reliquorum primorum 5, 7, 11, 13, 17, 19, &c. Et quod ad numeros ex primis compoſitos, eorum logarithmi facilè habentur addendo logarithmos numerorum primorum ex quorum multiplicatione producuntur.

Si cujuſvis logarithmi duplus quæritur, iſti duplo addatur 1, ut quod inde reſultat, exactior ſit quadrati logarithmus quæſitus.

Quod ad alias methodos inveniendi logarithmos, captum tyronum ſuperant.

CAP. III.

Canonis Logarithmorum Uſus generaliores.

CAnon logarithmorum in Mathematicorum operibus paſſim habetur; ſed ſeparatim in parvo volumine, ſimul cum ſinibus tangentibus & ſecantibus naturalibus & artificialibus (de quibus poſthac) curà A. Vlacq, continens logarithmos omnium numerorum ad 10000; Item in alio volumine ejuſdem curâ ad 100000 pertingens.

(1)

Numero quovis abſoluto, integro, decimali aut mixto, quatuor notarum, datô: logarithmum ejus invenire.

E tabula prome logarithmum numeri propoſiti, quaſi integer eſſet, (ſive talis ſit, ſive non) & pro numeri abſoluti diſtantia ab unitate, ſive ſupra eam ſive infra, logarithmo præfigatur debita characteriſtica; quæ ſigno hoc negativo — afficiatur, ſi abſolutus propoſitus ſit purè decimalis, ut duo ultimi in ſchem. indicante logarithmum eſſe nihilò (logarithmo ſcil. unitatis) minorem. Hic cernere licet eundem logarithmum, mutatô indice, pluribus numeris abſolutis inſervire.

abſol.	*Log.*
3571	3. 5527898
357'1	2. 5527898
35'71	1. 5527898
3'571	0. 5527898
'3571	$\bar{1}$. 5527898
'03571	$\bar{2}$. 5527898

(2)

Fractionis vulgaris $\frac{3}{4}$ *aut mixti ex integro & fractione vulgari logarithmum invenire.* v. g. *Log.* 2 $\frac{3}{4}$.

1. A logarithmo numeratoris ſubſtrahe log. denominatoris, reſtabitque logarithmus quæſitus. Nam $\frac{3}{4}$ eſt

3.	0. 4771212	
4.	0. 6020600	
$\frac{3}{4}$	$\bar{1}$. 8750612.	B.

quotus

quotus ex 3 diviſo per 4; ac proinde *per 2 cor. præc.* B eſt ejuſdem logarithmus.

In hujuſmodi ſic ſubſtrahitur log. Major à minore. 6 è 14 (nam in reliquis notis poſt indicem operatio eſt ut alibi) reſtant 8; 1 mutuatâ à 0, reſtat — 1. Hic ponitur ſignum ſupra indicem; nam non totus logarithmus, ſed index eſt negativus; cum ejus numerus $\frac{3}{4}$ non ſit nihilo ſed unitate minor. Log. B æquivalet huic 8750612 — 1000 0000.

2. Reducito $2\frac{3}{4}$ ad fractionem impropriam $\frac{11}{4}$, & hujus logarithmum ab illius log. ſubſtrahe.

Not. ſi log. B aut ejuſmodi (neglectô indice) quæratur inter logarithmos maximæ characteriſticæ in canone, numerum abſolutum ei reſpondentem 7500 invenies, qui propter ſignum negativum $\bar{1}$ eſt '75. Atque ſic ope logarithmorum reduci poſſunt fractiones vulgares ad decimales.

(3)

Dati logarithmi (1. 5782598) *non majoris indicis quàm* 3, *numerum abſolutum invenire*

Neglectô indice, quæratur inter logarithmos maximi indicis in tabula, & invenietur ei proximè æqualis 5782 953, ejuſque numerus abſolutus 3787, qui pro indice logarithmi propoſiti erit 37'87; ſed 3'787, ſi index fuiſſet 0: '3787, ſi index eſſet $\bar{1}$; 378'7, ſi index eſſet 2. &c.

(4)

Dati numeri abſoluti infra octo figuras (3567894) *logarithmum invenire.*

Sumatur (1) numerus quatuor primis figuris numeri propoſiti conſtans cum totidem ciphris quot ſunt reliquæ ejus figuræ, & alius numerus unitate excedens cum totidem cifris, ſcil. 3567000 & 3568000, horumque logarithmi cum debita characteriſtica, ſcil. 6. 5523031 & 6. 552 4248, (2) Sumantur tum iſtorum tum horum logarithmorum differentiæ, ſcil. 1000 & 1217; item exceſſus numeri propoſiti ſupra minorem numerum abſolutum,

tum, ſeu reliquæ figuræ numeri propoſiti, ſcil. 894. (3) Per reg. proport. dic.

Ut differentia abſolutorum 1000, *ad differentiam ſuorum log.* 1217 : *Ita exceſſus numeri propoſiti ſupra minorem abſolutum* 894, *ad exceſſum logarithmi quæſiti ſupra minorem logarithmum* 1088.

Tandem differentia inventa 1088 addatur minori log. dabiturque log. quæſitus, 6. 5524119.

(5)

Logarithmi propoſiti non majoris indicis quàm 6, *numerum abſolutum invenire.*

Hoc Patet ex præc. ſtabitque proportio ſic, 1217 : 1000 : : 1088 : 894. Si index log. propoſiti fuiſſet 5, 4, aut 3, &c. ejuſque logarithmum quàm exactum velis; tunc numerus quæſitus foret 356789'4, 35678'94, 3567'894. &c. Nihilominus praxibus vulgaribus ſufficiunt logarithmi & abſoluti prout in canone habentur proximè æquales abſque hoc rigore.

(6)

Datis duobus numeris tertium, Vel tribus quartum proportionalem invenire.

Patet, cum *per* 1 *&* 2 *cor. huj.* multiplicatio per logarithmorum additionem, diviſio per additionem fiant.

(7)

Quamvis numeri poteſtatem, & cujuſvis poteſtatis radicem invenire.

Numeri logarithmus duplicetur, dabiturque logarithmus quadrati. Triplicetur, dabiturque logarithmus cubi. &c. Item numeri cujuſvis logarithmus biſecetur, dabiturque logarithmus quadratæ radicis numeri propoſiti. Tripartiatur, dabiturque logarithmus radicis cubicæ. &c. Utrumque patet *ex* 3 *cor.*

(8)

Datis tribus numeris (20, 36, 150) *quartum proportionalem in ratione duplicata, triplicata &c. invenire.*

e

ne-

Trigonometria Plana.

CAP. I.

1 De Sinibus Tangentibus & Secantibus.

Definitiones.

1, GRadus eſt 360ma pars circumferentiæ, cujus 60ma pars dicitur Minutum primum, & hujus rurſus 60ma Minutum ſecundum, & ſic deinceps.

2. Menſura anguli eſt arcus circuli inter crura anguli æqualia comprehenſus pro centro punctum angulare habentis. Hinc, quot gradus continet arcus, totidem dicitur angulus continere.

Lineæ rectæ circulis applicatæ ad menſurandos arcus & angulos ſunt cordæ, ſinus, tangentes & ſecantes.

3. Chorda arcus eſt recta ejus extremitates connectens: ut CF eſt corda arcus CEF & anguli CAF; item complementi eorundem ad integrum circulum, ſcil. arcus CKF. Fig. 1.

4. Sinus rectus alicujus arcus aut anguli eſt perdendicularis ducta ab una extremitate arcus ad radium qui tranſit per alteram; ut CG eſt ſinus arcus CE & anguli CAE.

5. Sinus verſus eſt diametri portio inter ſinum rectum & circumferentiam: ut GE. Et eſt radius coſinu diminutus.

6. Tangens arcus vel anguli eſt recta tangens circulum in uno arcus extremo & terminata ad lineam quæ à centro per alteram arcus extremitatem tranſit. ut DE eſt tangens arcus CE & anguli CAE.

7. Prædicta linea tangentem terminans vocatur Secans. ut AD.

8. Coſinus arcus vel anguli eſt ſinus complementi ejuſdem arcus ad quadrantem. Similiter Cotangens, Coſecans. Sic LC vel AG eſt coſinus arcus CE, BN cotangens, AN coſecans.

9. Sinus totus, ſeu radius, eſt ſinus 90 graduum ſeu quadrantis.

Per Sinus ſimpliciter poſthac intelliguntur recti.

DATA.

1. Sinus cujuſvis arcus aut anguli eſt etiam ſinus complementi ejuſdem arcus aut anguli ad ſemicirculum vel duos rectos: ut C G eſt ſinus arcus K B C aut anguli K A C. Similiter tangentes & ſecantes.

2. Sinus rectus alicujus arcus eſt ſemicorda ejuſdem arcus duplicati. ſic eſt C G = G F = C F.

3. Sinus tangentes ſecantes & cordæ continent aliquot partes radij centeſimas, milleſimas aut decies-milleſimas &c. pro artificum placito.

4. Ut coſinus A G, ad ſinum C G; ita radius A E, ad tangentem E D.

5. Ut tangens E D, ad radium A E; ita radius A B, ad cotangentem B N. Item. Ut coſinus A G, ad radium A C; ita radius A E, ad ſecantem A N. *vid. Fig.* 1.

Hæc 4tum & 5tum patent propter ſimilia triangula, per 26. 3. El.

PROBL. 1.

Fig. 1. *Dato ſinu C G arcus C E, Coſinum L C invenire.*

In triang. rectang. A G C, *per cor.* 37. 3. eſt A C q = A G q + G C q; ablato igitur C G q ex A C q, reſtat C G q. hujus itaque quadrati numeris expreſſi radix eſt coſinus quæſitus in canone trigonometrico ponendus.

PROBL. 2.

Fig. 2. *Dato ſinu F C, & conſequenter B F coſinu: invenire arcus dupli ſinum D E. Item dato ſinu D E, & conſequenter coſinu atque ſinu verſo B E, E C: invenire arcus dimidij ſinum F C.*

1. In triang. æquiang. F B C, D E C, *per* 26. 3. El. eſt B C : B F :: D C : D E ſinum quæſitum.

2. Ob

2. Ob FN || DE & DF = FC eſt *per* 18. 3. *El.* EN = NC dimidium ſinus verſi cognitum. Dein, in triang. FBC, rectang. *per* 2 *cor.* 22. 3. eſt BC : FC :: FC : NC, Erg. *per* 34. 1. eſt BC × NC = FCq, cujus radix eſt ſinus quæſitus.

PROBL. 3.

Fig. 3. *Datis duorum arcuum ſinibus RH, ST, & conſequenter coſinibus AH, AT; invenire SP ſinum aggregati SL.*

Propter triang. æquiang. ARH, AOP, COT, SCT, eſt AR : RH :: AT : TG = CP, & AR : AH :: ST : SC, ſed eſt SC + CP = SL ſinui quæſito.

PROBL. 4.

Fig. 3. *Datis duorum arcuum ſinibus HR, SP, & conſequenter coſinibus AH, AP; invenire ST ſinum differentiæ SR.*

Eſt AH : HR :: AP : PO, quæ ablata ab SP relinquit SO. Rurſus eſt AR : AH :: SO : ST ſinum quæſitum.

PROBL. 5.

Fig. 1. *Datis cujuſvis arcus* CE *ſinu & coſinu CG, AG; invenire ejuſdem tangentem DE, Et dato coſinu, ſecantem AD.*

1. Eſto AG : GC :: AE : DE tangentem quæſitum.
2. Fiat AG : AC :: AE : AD ſecantem quæſitum.

Alia non pauca ſunt hujuſmodi problemata quæ conſtruendi canonis Trigonometrici laborem minuunt; ſed quoniam hæc per ſe ſola id opus poſſunt, ea tyronum inſtructioni ſufficere arbitramur.

PROBL. 6.

Canonem ſinuum tangentium & ſecantium ope præcedentium conſtruere.

Quod ad ſinus, Supponatur radius in quotcunque par-

tes æquales diviſus, *v. g.* in 10000000000; huic *per* 40. 4. *El.* æqualis eſt corda 60. *gr.* ideoque *per* 3 *dat.* dimidium ejus eſt ſinus 30 *gr.* Et biſecando hunc arcum *per* 1 *&* 2 *Probl.* habebitur ſinus arc. 15. *gr.* & hunc ſimiliter biſecando, ſinus 7 *gr.* 30 *m.* Ita continuando procedatur in ſinibus ſequentium arcuum inveſtigandis, donec perventum fuerit ad ſinus quoſdam inter ſe habentes rationem ſenſibiliter ſeu fere eandem, quam ipſi arcus habent (quod poſt duodecim ſubdiviſiones continget) ſcil. ad 5113218 ſinum arcus 1' 7578125 *m.* & 2556609 ſinum arcus 0' 87890625 *m.* quorum ille ſinus eſt hujus duplus, ſicut ille arcus hujus. Igitur ob eandem fere rationem ſimiliter inter 0'.878906525 *m.* & 1. *m.* quæ inter horum ſinus, dicito eſt *arc.* 0' 878906525 *m* : *arc.* 1 *m.* : : *ſin* 2556609 : 2908830 vel fere 2909000 ſinum unius minuti.

Jam cognitô ſinu unius minuti inveniri poteſt ſinus duorum minutorum *per* 2 *probl.* Et cognitis ſinu duorum & ſinu unius, inveniri poteſt ſinus trium *per* 3 *Probl.* & ſimiliter ex ſinu trium & ſinu unius, ſinus quatuor minutorum, & ita deinceps uſque ad 90 *gr.*

Quod ad tangentes & ſecantes, ex Jam cognitis ſinibus per Probl. 5. inveſtigari poſſunt.

Inter alias propoſitiones quæ hanc vulgarem methodum canonem Trigonometricum conſtruendi facilitant, apud *Deſchales* quatuor habentur, quibus per ſolam additionem ſinus omnium arcuum ſupra 60 *gr.* & omnium inter 30 & 60 per unicam radicis quadratæ extractionem inveniuntur; item tangentes arcuum ſupra 45 *gr.* per unicam duplicationem & unam additionem; item ſecantes omnium arcuum uſque ad 90 *gr.* unô ſemper intermiſſo, per unam additionem. Verum conſultô tyronum captu, eas miſſas facimus, aliaſque ſimiliter methodos canonem conſtruendi.

De Logarithmis Sinuum Tangentium & Secantium, qui *Sinus* Tangentes & ſecantes artificiales vulgo dicuntur.

HI pro radio naturali 10000000000 ſunt computati, ut inde exactiores ſint; quod in cauſa eſt, cur radius artificialis pro characteriſta habeat 10: ut plurimum tamen paucioribus conſtant figuris, reliquis calculi facilioris gratiâ abſciſſis.

Si canon Logarithmorum exſtaret pro omnibus numeris uſque ad 10000000000, per ſolam tranſcriptionem ex iſto canone conſtrueretur tabula ſinuum tangentium & ſecantium artificialium; ſed cum infiniti foret laboris canonem ejuſmodi condere, ad artificialium fabricam adhibentur operandi compendia, quæ attingere non patitur hujus epitomes anguſtia.

Datis ſinibus artificialibus facile habentur ejuſmodi tangentes; cum enim (*per.* 4. *dat.*) ſit *coſ.* : *ſin.* :: *Rad.* : *tang.* coſinus artificialis ſubductus è ſumma radij & ſinus artificialium relinquit tangentem artificialem.

Similiter & ſecantes artificiales; nam cum ſit *coſ.* : *Rad.* :: *Rad.* : *ſec.* coſinus artificialis ſublatus ab artificiali radio duplicato relinquit ſecantem artificialem.

Not. 1. Tangentes & cotangentes artificiales ſunt ſibi invicem complementa arithmetica ad duplum radij artificialis. Nam (*per dat* 5.) eſt *tang.* : *Rad.* :: *Rad.* : *cotang.* Item coſinus & ſecantes artificiales: ut patet ex præc. proport.

Not. 2. Secantes artificiales, ob facillimam ipſarum inventionem, in perpaucis tabulis haberi, idque ſine characteriſtica, & tunc vocari ſinuum complementa arithmetica, ad radium ſcil. artificialem. Sic 9. 8810455 artificialis coſinus arcus 40 *gr.* 30 *m.* ſublatus à 10. 0000000 relinquit 1189545 pro complemento arithmetico ſuo, cui ſi radium addas, ſeu ejus indicem 10 præponas, ſic

10.

10. 1189545, dabitur ſecans artificialis pro 40 *gr.* 30 *m.* Præcedens ſubſtractio conſius à radio facilius fit, ſi pro ſingulis ejus figuris ſubſtituas earum complementa ad 9, ſed pro dextima complementum ad 10.

Canonis *Trigonometrici* Uſus generaliores.

(1.)

Dati arcus vel anguli ſinum tangentem aut ſecantem, ſive naturalem ſive artificialem invenire. Et contra.

PRopoſiti arcus gradum pete in vertice paginæ, ejuſque minutum in latere, & ex adverſo minutorum quæſitum invenies in columella ſub debito titulo. Alterum ex hoc patet. Si quæſitum non reperiatur in tabulis, ſume quod proximè illi æquatur, ut praxibus vulgaribus ſufficiens.

Si arcui aut angulo adhæreant minuta 2da, ejuſque ſinum aut tangentem &c. accuratum velis; utere parte proportionali. Ita ſi angulus proponatur 36. *gr.* 24. *m.* 36 *ſec.* quæraturque ejus ſinus naturalis quàm exactè; proximè minor in canone eſt 5934189, *ſin.* 36 *gr.* 24 *m.* hujuſque differentia à proximè ſequente eſt 2341; per reg. proport. dic, eſt 60 *ſec*: 2341 : : 36 *ſec.*: 1404 addendum ſinui 36 *gr.* 24 *m.* unde habetur 5935593 ſin. quæſit.

Si vero hoc ſinu datô quæratur arcus, tunc dicito, eſt 2341 : 60 *ſec.* : : 1404 : 36 *ſec.* addenda arcui 36 *gr.* 24 *m.* Similiter de ſin. tang. &c. artificialibus.

Not. Perinde eſt ſubſtrahere logarithmum, ac ejuſdem complementum arithmeticum addere & à ſumma auferre 10. 0000000; ſicuti vice ſubſtractionis 3 ab 8, ſi addas 7 (complementum ejus ad 10) & à ſumma auferas 10, utrobique reſultabit 5.

(2)

Dati arcus cordam invenire. Et è contr.

1. Sume ſinum dimidij arcus propoſiti, hujuſque duplus erit quæſit.

2. Sit

2. Sit corda 4175304, hujus dimidium 2087652 invenies in tabula ſinuum eſſe ſinum arc. 12 *gr.* 3 *m.* ac proinde arc. quæſit. eſt 24 *gr.* 6 *m.* Utrumque patet ex *dat.* 2. *huj.*

Not. Si in uſu ſinuum tangentium & ſecantium naturalium laborem minuere velis, duabus aut quatuor ultimis figuris mulctare potes, prout opus tuum patitur, quemadmodum ſinus in canone duabus mulctantur per punctum.

De complementis arithmeticis & ſecant. artificial. hactenus dictum in duob. notand. præc.

(3)

Dati arcus ſinum verſum artificialem invenire. Et contr.

duplicato

1. Ab artificiali ſinu dimidij arcus propoſiti aufer ſemiradium artificialem ſeu ſinum 30 *gr.* Ratio eſt, (*vid. fig.* 2.) In triang. rectg. B F C, D E C, *per* 26. 3. *El.* eſt B C : C D vel $\frac{1}{2}$ B C : F C :: F C : E C.

2. Semiſumma ſinus artificialis 30 *gr.* & ſinus verſi artificialis propoſiti eſt artificialis ſinus rectus pro dimidio arcus quæſiti. Patet ex priore.

CAP. II.

De ipſa Triangulorum rectilineorum reſolutione.

THEOR. I.

Fig. 4. *In triangulo rectangulo A B C, ſi alterum è cruribus anguli recti fiat radius; Reliquum erit anguli oppoſiti tangens, hypotenuſa vero ſecans.*

Sic ſi ducto arcu C E fiat A C radius, evadunt C B tangens & A B ſecans anguli A. Similiter facto C B radio, A C erit tang. & A B ſec. anguli B. Hæc patent

tent ex 6 & 7 def. huj. Ac proinde eſt B C : Rad. : : C A : *t*. B, & B A : *ſec*. B.

THEOR. 2.

Fig. 5. 6. *In triangulo rectilineo, latera ſinibus angulorum oppoſitorum ſunt proportionalia.*

Sit (1) triang. acutang. A D E circulo inſcriptum & latera habens biſecta, ut in 5 fig. Ex 4 def. $\frac{1}{2}$ D E vel D N eſt ſinus anguli D O N = D A E, *per* 11. 4. *El.* Similiter D S eſt ſinus ang. A E D, & A L ſin. ang. A D E.

Sit (2) ut in fig. 6. triang. obtuſang. ad D, habenſque circulum ſibi circumſcriptum. $\frac{1}{2}$ A E vel E N eſt ſin. ang. M O E, *i. e.* anguli C, *per* 11. 4. *El.* ſed *per* 36. 4. *El.* eſt C + D = 2 rect. Erg. E N eſt ſinus utriuſque C & D, *per dat.* 1. Præterea ut in fig. 5. oſtendi poſſunt $\frac{1}{2}$ D E & $\frac{1}{2}$ A D eſſe ſinus angulorum oppoſitorum.

3. Si triangulo rectang. circumſcribatur circulus, patet *per* 13. 4. *El.* angulum rectum fore in peripheria & hypotenuſam tranſire per centrum; atque ſic hujus dimidium ſeu radium eſſe ſinum anguli recti. Et quod ad reliquorum laterum dimidia, patet ex dat. 2. eſſe ſinus angulorum oppoſitorum. Cum igitur in omni triangulo dimidia laterum ſint ſinus angulorum, ſintque tota ad tota, ut dimidia ad dimidia, erit D E : A D : : *ſin.* A : *ſin.* E. &c. Q. E. D.

THEOR. 3.

Fig. 7. *In omni triangulo rectilineo A C B, Ut G B ſumma crurum anguli contenti A, ad ipſorum differentiam B D; Ita tangens G C ſemiſummæ angulorum ijs oppoſitorum, ad D E tangentem ſemidifferentiæ eorundem.*

Ducto circulo ad intervallum A C, & D E || G C, ducantur

ducantur reliquæ lineæ, ut in fig. patet eſſe $GB = AB + AC$, $DB = AB - AC$, Item *per* 2. 3. *El.* ang. $GAC = ACB + CBA$, & *per* 11. 4. *El.* eſſe ADC ſeu $DCA = \frac{1}{2} GAC = \frac{C+B}{2}$ ejuſque tangentem eſſe GC, poſitô ſcil. CD radio. Item exceſſum anguli ACB ſupra ſemiſummam ACD vel ADC, ſcil. DCE eſſe differentiam alterutrius ACB, ABC à ſemiſumma, vel eſſe eorum ſemidifferentiam, hujuſque tangentem eſſe DE, eodem CD manente radiô.

Igitur in triang æquiang. GCB, DEB, (ob $DE \parallel GC$, & ang. B communem) erit *per* 26. 3. *El.* $GB : DB :: GC : DE$, *i. e.* $AC + AB : AB - AC ::$ *tang.* $\frac{C+B}{2}$: *tang.* $\frac{C-B}{2}$. Q. E. D.

THEOR. 4.

Fig. 8. 9. *In omni triangulo rectilineo, ut vera baſis AE, ad ſummam crurum AC : ita eorum differentia AF, ad baſin alternam AI.*

Quovis latere AE poſitô pro baſe, & ductô circulô ad intervallum cruris minoris DE, item tangente AG. &c. Erit *per* 16. 4. *El.* $CA \times AF = AGq = EA \times AI$, Erg. *per* 30. 3. eſt $AE : AC :: AF : AI$. Q. E. D.

Not. Si maximum latus fiat baſis, tunc baſis vera excedet alternam; alias minor erit. Hoc logarithmos vix requirit; ſequens vero cum logarithmis eſt iſto multò expeditius.

THEOR. 5. ad. idem.

Fig. 10. *In omni triangulo rectilineo BCD, Si ſemidifferentia crurum DB, BC addatur ſemibaſi $\frac{1}{2} DC$, eidemque detrahatur; Tunc erit, Ut rectangulum crurum, ad rectangulum ſummæ & reſidui; Ita quadratum radii, ad quadratum ſinus ſemianguli comprehenſi $\frac{1}{2} B$.*

Triangula

Triangulo circumſcribatur B D E C, biſecetur ang. B per rectam B E, in quam cadat perp. C R, fiat D P || C R, unde ang. ad H & R ſunt recti, & B G = B D, D H = H G. Fiat H Z || G C, eritque *per* 7. 3. *El.* H G vel D H = Z C, & G C = H Z; quâ biſecta in K, circa diam. H Z. ducatur circ. H R Z, eritque C R = D P (nam eſt ang. rect. H = P in ſemicirc. Unde *per* 9. 2. *El.* erit P Z || H R; ſed *ex conſtr.* eſt H P || R Z, Erg. *per* 7. 3. *El.* eſt R Z = H P; ideoque C R = D P) ducatur denique C E, ipſique à centro perp. A S.

Hoc factô *ex conſtr.* eſt ang. D B E = E B C, ideo *per* 24. 4. *El.* arc. D E = E C, unde diameter A E biſecans arc. D E C biſecat cordam D C (Nam ſi intelligantur duci A D, A C, tunc in triang. D K A, K C A, eſt D A = A C, A K commune; & ang. D A K = K A C, *per* 24. 3. *El.* ideoque per 10. 3. eſt D K = K C) Atque ſic *D* K ſeu K C eſt ſemibaſis.

Inſuper, propter G C = H Z & G B = B D, eſt G C vel H Z differentia crurum, K Z vel K M ſemidifferentia; igitur D M eſt ſumma ſemibaſis & ſemidifferentiæ crurum, & D N reſiduum ſeu earum differentia.

Denique poſitô A E radio, erit E S ſinus ang. E A S vel E B C. Nam *per* 11. 4. *El.* eſt E A S = $\frac{1}{2}$ E A C = E B C.

In triang. igitur æquiang. E A S, B D H, B C D, ſunt A E : E S :: B D : D H, & A E : E *S* :: B C : C R vel D P; Erg. *per c.* 21. 1. *El.* eſt A E q : E S q :: B D × B C : D H × D P vel D M × D N (ſunt enim hæc æqualia *per* 1 *cor.* 16. 3.) *i. e.* q. Rad. : q. *ſin.* $\frac{1}{2}$ B :: B D × B C : $\frac{DC}{2}+\frac{BC-BD}{2}\times\frac{DC}{2}-\frac{BC-BD}{2}$. Q. E. D.

Conſectarium Generale.

Ex præcedentibus patet, In quovis triangulo rectilineo tribus cognitis, quorum unum ſaltem eſt latus, quartum inveniri poſſe. Hoc in quatuor problemata ſequentia dividitur. In horum figuris *Not.* terminos datos per vir[redacted]ari, quæſitum vero per duo puncta.

PROBL.

PROBL. 1.

Fig. 11. *Datis duobus angulis cujuſvis trianguli rectilinei A B C, & uno latere B C, invenire quodvis reliquorum A C.*

Per 2.*th.* eſt *ſin.* ang. A : B C : : *ſin.* B : A C. Igitur ſi 2dus terminus multiplicet 3tium, & primus dividat productum, dabitur quæſitum. ut in 1. ſchem. Facilius.

E ſumma logarithmorum 2di & 3tij aufer log. primi, dabiturque Log. 4ti; ut in 2 ſchem. Vel, ſimul addantur compl. arithm. primi & reliquorum logarithmi, & ab indice ſummæ aufer 10, ut in 3 ſchem. Similiter invenitur reliquum latus.

	gr.	*m.*	
s. A.	104	54	96637.
: B C.			210.
: : s. B.	35.	06.	57500.
: A C.			124'9

	Log.
B C.	2. 3222193
s. B.	9. 7596718
	12. 0818911
s. A.	9. 9851462
AC.	2. 0967449

s. A.	0. 0148538. *co. ar.*
: B. C.	2. 3222193
: : s. B.	9. 7596718
: A.C.	2. 0967449

Si latus quæſitum ſit hypotenuſa rectanguli, ut in *Z*; tunc facilius dicito per 1 *th.* Rad. : B C : : *ſec.* C : A C.

Et ſi quæſitum A C ſit alterum è cruribus anguli recti, ut in X; tunc *per* 1 *th.* facilius ſic, Rad. : B C : : *tang.* B : A C.

PROBL. 2.

Fig. 12. *Datis duobus trianguli lateribus B A, B C, cum angulo C uni eorum oppoſito; reliqua invenire.*

Ang. A facilè ſic. *Per* 2 *th.* eſt A B : s. C : : B C : s. *A.*

Inventô ang. A, habetur B; quo cognitô, invenitur A C *per* 1 *Probl.*

Not. Præcognoſci debere etiam ſpeciem anguli quæſiti; Nam ſi in obliquangulo C B A ſupponatur acutus, ſicuti revera hic eſt, inde in latere quærendo A C, dabitur

vèra

vera quantitas C A; ſi autem ſupponatur obtuſus, contra quàm eſt; tunc ex ijſdem C B, B A, C, invenietur tantum quantitas C O, latere quæſito minor.

PROBL. 3.

Fig. 13. *Datis duobus trianguli lateribus A B, B C, & B contento, invenire reliqua.*

Cum *per* 3 *th.* ſit $AB + BC : BC - AB :: tang. \frac{A + C}{2} : tang. \frac{A - C}{2}$, ſi hæc ſemidifferentia addatur ſemiſummæ angulorum A & C, dabitur major ang. A; ſi vero ſubſtrahatur, dabitur minor *C*. Et tunc A C. per probl. 1.

Si triang. ſit rectang. ut S, hoc facilius fit poſito B C radiô; eſt enim *per* 1 *th.* B C : Rad. : : A B : *t.*C. Et poſitô A B radio, eſt A B : Rad. : : *B* C : *t.*A. Item A C : *ſec.* A; Et invertendo etiam.

Quod ſi in triang. rectang. ex datis duobus lateribus quæratur 3tium, hoc fit *per ſch.* 37. 3. *El.* Sed ex datis hypotenuſa & uno anguli recti crure alterum invenitur multò facilius ſic. *Vid.* fig. 14. Cum *per* 1 *c.* 22. 3. ſit D C : A C : : A C : C E; ſemilogarith. rectanguli D C × C E *i. e.* A B + B C × C E, erit log. lateris A C. Similiter invenitur B C, ſi A C fiat baſis.

PROBL. 4.

Datis omnibus trianguli lateribus invenire angulum.

Pro majore angulorum minorum E ſic. *Vid.* 8. fig. Poſito latere maximô pro baſe vera, eſt *per* 4 *th.* A E : A D + DE : : A D — D E : A I baſin alternam; hac ſublatâ ab A E, reſidui dimidium B E erit baſis rectanguli D B E. Dic igitur, *per* 1. *th.* eſt B E : D E : : *Rad.* : *ſec.* E. Hujus ſecantis (ſi artificialis ſit) compl. arith. ad 20. 0000000 eſt artificial. coſin. anguli E.

Pro minore angulorum minorum A. Reſidui dimidium

baſi

baſi alternæ additum dat A B baſem rectanguli A D B; dic igitur, eſt A B : A D : : *Rad.* : *ſec.* A.

Pro ang. max. E ſic. *Vid.* 9. *fig.* Inveniatur ut ante baſis alterna A I, unde ſublata baſe verâ, reſidui dimidium E D erit baſis rectanguli E D B. Dic igitur, eſt E B : E D : : *Rad.* : *ſec.* ang. acuti D E B, quo ſublatô à 180 *gr.* reſtat ang. A E D quæſit.

Fig. 10. *Aliter per logarithmos & facilius.*

Semidifferentia crurum anguli quæſiti D B C *v. g.* addatur & ſubſtrahatur ſemibaſi D K, unde habentur ſumma & reſiduum; Et quia *per* 5. *th.* eſt rectang. crurum ad rectang. ſummæ & reſidui, ut quadrat. radij ad quadrat. ſinus ſemianguli $\frac{1}{2}$ D B C; Si ſumma logarithmorum utriuſque cruris ſubſtrahatur è ſumma logarithmorum prædictæ ſummæ, reſidui & dupli radij artificialis, relinquetur log. quadrati ex ſinu ſemianguli quæſiti, ſeu ſemianguli duplus ſinus artificialis.

Ratio calculi patet; Nam uterque ſimul logarithmus ſummæ & reſidui eſt log. rectanguli horum, & hic ſimul cum duplo radio artificiali eſt log. producti ex rectangulo & quadrato radij naturalis: Item, uterque ſimul log. crurum eſt log. rectanguli crurum; quem à log. iſtius producti ſubſtrahere, perinde eſt, ac ipſum productum per rectangulum crurum dividere.

Vel vice ſubſtractionis, addantur logarithmorum utriuſque cruris complementa arithmetica ad 10. 0000000, atque ſic patet, à tota ſumma auferri debere 20. 0000000, propter duo complementa addita. *Vid. Not.* 1. *uſ. Can. Trigon.*

Ac proinde in hujus problematis calculo ſufficit, ſi neglecto duplo radiô artificiali, ſimul addantur complementa Arithmetica logarithmorum utriuſque cruris & logarithmi ſummæ & reſidui.

Trigonometria

Trigonometria Sphærica

Prout à Nobli *Merchiſtonij* Barone contracta fuit & explicata per partes circulares.

C A P. I.

De Præcognitis quibuſdam.

Definitiones.

1. Circulus maximus dicitur quô major duci nequit in ſuperfice ſphæræ.

2. Menſura anguli ſphærici eſt arcus maximi circuli inter anguli crura ad quadrantes extenſa pro polo punctum angulare habentis: diciturque ſuo angulo æqualis.

3. Triangulum ſphæricum de quo hic agitur, tribus conſtat arcubus maximorum circulorum, quorum ſinguli ſunt quadrante minores. Eſtque vel rectangulum vel obliquangulum.

4. Sphæricum rectangulum hujuſmodi eſt quod unum habet angulum rectum. Obliquangulum quod nullum.

5. Anguli & latera trianguli ſphærici vocari poſſunt ejus partes.

6. In ſphærico rectangulo crura anguli recti & reliquarum partium complementa ad quadrantem vel angulum rectum vocantur partes circulares. *vid. fig.* 15.

7. Dum duabus datis partibus circularibus (ſimul cum angulo recto, qui incognitus eſſe nequit) quæritur tertia pars circularis; harum trium uni reliquæ vel adjacent, quæ proinde vocantur Extremæ adjacentes; vel neutra adjacet, dicunturque Extremæ oppoſitæ; & iſta una dicitur Pars media.

Sic in rectang. A B D, parti mediæ compl. A D B ſunt A B & compl. A D extremæ adjacentes; ſed D B & compl. A D B extremæ oppoſitæ. Item parti mediæ D B ſunt compl. A D B & A B adjacentes (nam ang. rect. B non interrumpit.

rumpit adjacentiam, quia non numeratur inter partes circulares) *ſed compl.* AD. *& compl.* DAB *ſunt oppoſitæ. & ſic de cæt.*

8. Latera dicuntur angulis æqualia; cum ſunt eorum menſuræ.

Quod ad reliqua circulorum maximorum triangula præter jam dicta, vel reſolutione non egent, vel ope dictorum reſolvuntur. Nam ſi duo latera ſint quadrantes, ut in triang. FBG, Fig. 15. *patet latera eſſe angulis oppoſitis æqualia.*

Si unum latus ſit quadrans, ut in triang. GAD; *Anguli acuti minores ſunt lateribus oppoſitis, ut ex figura patet; ſed producto uno laterum quadrante minorum, ut* GD, *ad quadrantem, ductoque arcu* AB, *habebis triang. rect.* DAB *prioris partibus circularibus conſtans. Nam* DB *eſt complementum lateris* DG *ad quadrantem, ang.* BAD *eſt complementum anguli* GAD *ad rectum,* ADB *complementum anguli* GDA *ad duos rectos, &* AB *menſura anguli* G.

Si unum è lateribus quadrantem excedat; tunc arcus perpendicularis in illud ab angulo oppoſito cadens dividet triangulum in duo rectangula.

Si duo denique latera quadrantem excedant; tunc his ad ſemicirculos productis atque ſic concurrentibus; aliud habebis triangulum, cujus partes vel eædem ſunt cum partibus trianguli propoſiti, vel earum complementa ad ſemicirculum ſeu 180. gr.

THEOR. I.

Diameter eſt maxima rectarum intra ſphæram.

Nam ſi ad extremitates cujuſvis alterius intra ſphæram ducantur duo radij, hi ſimul ſeu diameter ſunt eâ majores, duo nempe trianguli latera reliquô.

THEOR. 2.

Idem eſt centrum ſphæræ & circuli in ea maximi.

Circuli maximi diameter eſt maxima rectarum intra ſphæram (aliàs in ſphæra circulus maximo major duci poſſet, circa rectam ſcil. maximi diametro majorem)

ci

V[illegible]

quadrantes uſque. Igitur eſt trianguli rectanguli GCD ang. GDC vel ADB > GC; ſed eſt ang. DAB = CF, Erg. ang. A + D > rect. ac proinde omnes ſimul majores duobus.

2. De obliquang. vid. Y 17. fig. ductô perpendiculari, eſt ang. A + ADB > rect. & E + EDB > rect. Ideoque A + D + E > 2 rect.

COR. *Si trianguli EDA latus EA quadrante minus magis accedat ad quadrantem quàm angulus oppoſitus D; Erit hic angulus quadrante major.*

Fig. Y.

Dicatur acutus. *Ex hyp.* ſunt EA & D quadrante minora; ſed *ex hyp.* EA magis accedit ad quadrantem, quàm D; Erg. eſt EA > D. Q. E. A. Menſura enim anguli acuti ſubtendit ejus crura ad quadrantes extenſa.

THEOR. 5.

Si tres circuli maximi ſe invicem ſecando conficiant triangulum AED, eorumque poli fiant puncta angularia alterius trianguli FGH; Erunt latera prioris æqualia angulis poſterioris; & anguli prioris æqualia lateribus poſterioris; ſi tantum pro maximo latere vel angulo ponatur ejus complementum ad ſemicirculum.

Fig. 18.

Polus circuli BDC eſt G, circuli ODI eſt F, circuli AMP eſt H. NM eſt menſura anguli DAE, OC anguli ADE, LP eſt menſura anguli DEM complementi ſcil. anguli DEA ad ſemicirculum.

Dem. Eſt quadr. FN = HM quadr. ſed eſt NH communis, Erg. eſt FH = MN menſuræ anguli DAE. Similiter eſt GF = OC menſuræ anguli ADE, & GH = LP menſuræ complementi anguli AED ad ſemicirculum. Similiter probatur AE = MP menſuræ anguli GHF, EC = LC menſuræ anguli G, & AD = NO menſuræ complementi anguli GFH ad ſemicirc. Erg. latera prioris æquantur angulis poſterioris, & anguli prioris lateribus poſterioris Q. E. D.

COR. *Hinc ſequitur angulos trianguli ſphærici poſſe mutari in latera: Et è contr.*

SCHOL. *De Analemmate.*

SOle in puncto orientis exiſtente, ſi prope planum verticale ortum reſpiciens ita ſtatuatur ſphæra, ut meridianus ſuus cœli meridiano correſpondeat, & Arietis principium ſit in horizonte; tunc propter ſolis à nobis diſtantiam quæ ſupponatur infinita, ejuſque radios propterea planè parallelos, ita ſe habebit ſphæræ projectio ſeu umbra in plano prædicto. *Vid. Fig.* 19.

1. Meridiani umbra erit circulus HZON; Quoniam radij in planum meridiani perpendiculariter incidunt.

2. Umbræ horizontis HO, Eclipticæ EC, Æquatoris ÆQ & omnium circulorum iſtis parallelorum, item coluri æquinoctialis ſeu circuli horæ ſextæ, erunt lineæ rectæ cum ſuis diametris coincidentes. Quoniam radij ſolares in eorum circumferentias tantum cadunt.

3. Omnes circuli per utrumque mundi polum ducti (præter circulum horæ ſextæ) umbras projicient ellipticas ſeu quaſi ovales. Quoniam in eorum plana radij obliquè cadunt. Similiter omnes circuli per Zenith & Nadir tranſeuntes, præter primum verticalem per orientis & occidentis puncta ductum; hujus enim projectio eſt linea recta ZN. Hæc omnia patent.

Ulteriùs patet, quod ſemidiameter quælibet, ut *ÆX*, ſuum quadrantem hic repræſentans à radijs ſolaribus parallelis dividitur in ratione ſinuum; cum iſti quadrantem ſecantes in ſemidiametrum ÆX perpendiculariter incidant. Sic ab X ad circulum horæ 5tæ punctatum extenditur ſinus 15 graduum æquatoris, ſuum arcum ideo repræſentans; & ſic de cæt.

Similis prorſus eſt hemiſphærij occidentalis projectio; unde analemma utrumque hemiſphærium alternis vicibus repræſentat. Sic XE eclipticæ primum quadrantem repræſentat, EX ſecundum, XC tertium, & CX quartum, & ſic de cæt.

CAP. II.

De ipſa *Triangulorum Sphæricorum* reſolutione.

LEM. 1.

In triangulo ſphærico rectangulo A D B, Ut ſinus baſis A B, ad radium A M; Ita tangens perpendicularis B K, ad tangentem anguli ad baſim M L,

Fig. 20.

LEM. 2.

Ut ſinus hypotenuſæ A D, ad radium A I; Ita ſinus perpendicularis D F, ad ſinum anguli ad baſim H I.

Utrumque patet. Nam in analemmate A D B repræſentat triangulum ſphæricum rectangulum ad B, ita ut A D repræſentans hypotenuſam ſit ejuſdem ſinus; A B repræſentans baſin ſit baſeos ſinus; curva D B repræſentet arcum perpendicularem, cujus ſinus eſt D F & tangens K B, I H eſt ſinus anguli ad baſim D A F, & LM tangens, A I denique vel A M radius.

THEOR. 6.

In rectangulo ſphærico, 1 *Radius & ſinus partis mediæ tangentibus extremarum adjacentium,* 2 *Item coſinibus oppoſitarum ſunt reciprocè proportionales.*

Fig. 15. (i. e. *Radius eſt ad tang. unius extremæ adjac. ut tang. alterius, ad ſin. partis mediæ. Et Rad. ad coſ. unius extr. oppoſ. Ut coſ. alterius, ad ſin. partis mediæ*) *Vel logarithmicè ſic.*

Radius cum ſinu partis mediæ æquatur ſimul tangentibus extremarum adjacentium. Item coſinibus oppoſitarum.

Utriuſque partis tres ſunt caſus; Nam pars media vel eſt crus anguli recti, ſcil. *D* B aut A B; Vel complementum hypotenuſæ A D; Vel complementum anguli obliqui, ſcil. comp. *D* A B aut comp. A D B.

Dem 1. Pars, poſitô *D B* (in triang. A B *D*) pro parte media, ſic.

Per 1. *Lem.* eſt *ſin.* D B : Rad. : : *tang.* A B : *tang.* A D B, & *permut.* *ſ.* D B · *t.* A B : : Rad. : *t.* A D B; ſed *per.* 5 *dat.* eſt *tang.* compl. A D B : Rad. : : Rad. : *tang.* A D B; Erg. *per* 2 *ax.* 1. El. eſt *ſin.* D B : *tang.* A B : : *tang.* compl. A D B : Rad. Vel *Invert.* Rad. : *tang.* compl. A D B : : *tang.* A B : *ſin.* D B *Similiter ſi A B ſit pars media.*

Dem. 2 Pars, poſitô D B pro part. med. *Per* 2 *Lem.* eſt *ſin.* A D : Rad. : : *ſin.* D B : *ſin.* D A B; & *permut.* Rad. : *ſin.* *D A B* (ſeu *coſ.* comp. *D A B*) : : *ſin.* A D (ſeu *coſ.* comp. A D) : *ſin.* D B. Similiter ſi A B fiat media.

Utriuſque partis caſus reliqui hinc patent. Nam pars media comp. *A D* cum ſuis extremis in triang. *A B D* eædem ſunt cum media D C ejuſque ſimilibus extremis in triang. G C D.

PROBL.

Fig. 16. *Datis duabus partibus circularibus trianguli ſphærici rectanguli, tertiam quamlibet invenire.*

Ex datis A B, B C, ſi quæratur ang. B, Patet ex 7 *def.* comp. B eſſe partem mediam habentem complementum lateris A B, & latus B C pro extrem. adjac. in triang. X; Igitur *per* 1. *part. Theor.* ita ſe habebit proportio; Rad. : *tang.* lateris B C : : *tang.* comp. lateris A B : *ſin.* comp. anguli B. Hic per regulam auream inventus, ſi ſit ſinus 54. *g.* erit ang. B 36. *g.*

Si vis ang. B in triang. Z ex datis A C, A, ita ſe habebit proportio; Rad. *coſ.* A C : : *coſ.* comp. A (*i. e. ſin.* A) : *ſin.* comp. B. part. med. quæſitæ.

Si vis A B in triang. Y ex datis A, B C; patet B C eſſe part. med. atque comp. A & comp. A B eſſe extr. oppoſ. & ſic ſtabit proportio Rad. : *coſ.* comp. A B (ſeu *ſin.* A B quæſiti) : : *coſ.* comp. A : *ſin.* B C part. med. Igitur productum ex primo & 4to dividatur per 3tium, quotus erit 2dus terminus quæſit. Nam in quatuor proportionalibus

portionalibus, productum ab extremis æquatur producto à medijs; ac proinde primus terminus dividens hoc productum, dat 4tum quæſit. 2dus 3tium, & 3tius 2dum.

Sed calculus ope logarithmorum eſt facillimus; Nam ex Theor. & Logarithmorum natura patet hæc reg.

Radius cum ſinu partis mediæ extremarum unâ multatus dat alteram. Et utraque ſimul extrema radiô mulctata dat ſinum partis mediæ.

Not. Hic per *Extremas* intelligi earum tangentes vel coſinus artificiales, prout ipſæ extremæ ſunt adjacentes vel oppoſitæ.

THEOR. 7.

Fig. 17. *In triangulo ſphærico ſpeciatim obliquangulo, latera ſinibus angulorum oppoſitorum ſunt proportionalia.*

Sit obliquang. E D A. ductâ perpend. D B, duo fient rectang. E D B, D B A; fiat D B pars media utrobique; unde extr. oppoſ. in rectang. A D B erunt comp. A D & comp. A; ſed in rectang. B D B erunt comp. E D & comp. E. ſed *per præc.* eſt Rad. : *coſ.* comp. D A B : : *coſ.* comp. A D : *ſin.* D B, vel *Invert. coſ.* comp. D A B : Rad. : : *ſin.* D B : *coſ.* comp. A D : ſed etiam eſt Rad. : *coſ.* comp. D E B : : *coſ.* comp. E D : *ſin.* D B Erg. *ex æqualit. perturb.* eſt *coſ.* comp. D A B : *coſ.* comp. D E B : : *coſ.* comp. E D : *coſ.* comp. A D. ſeu *ſin.* D A B : *ſin.* D E B : : *ſin.* E D : *ſin.* A D. Q. E. D.

PROBL.

Z
X
Datis duobus lateribus A D, E A cum angulo D uni eorum oppoſito, invenire angulum E alteri oppoſitum. Et datis angulis D, E, cum latere A E uni eorum oppoſito, invenire latus D A alteri oppoſitum.

Utrumque facile fit: eſt enim in triang. Z, *ſin.* D : *ſin.* A E : : *ſin.* E : D A. Et in X, *ſin.* A E : *ſin.* D : : *ſin.* A D : *ſin.* E. Qui ſinus in canone Trigon. ſupponatur indicare ang. E eſſe vel 72. *g.* vel 108. *gr.* Quod ſi latus A D ſupponatur eſſe 74. *gr.* atque ſic magis accedere ad

90 gr. quàm vel 72 vel 108, tunc *per cor.* 4 *th. huj.* erit E 72. g.

THEOR. 8.

Fig. 17. *Si perpendicularis DB triangulum obliquangulum reducens ad duo rectangula ABD, BDE, ſemper ponatur pro una extremarum in utroque; Erit ut pars media unius rectanguli, ad partem mediam alterius; ita altera extrema unius, ad alteram alterius.*

Patet. Nam *per 6 th.* eſt Radius ad communem extremam DB, ut altera extr. primi rectang. ad part. med. ejuſdem; & ut altera 2di ad part. med. 2di.

PROBL.

Fig. 17. *In triangulo obliquangulo, tribus datis quorum unum ſaltem eſt latus, quartum quodlibet invenire.*

Ducatur perpend. ab uno angulorum hac conditione, Ut unum è rectangulis duo inde habeat data, & alterum unâ operatione acquirat unum. Sic in triang. Y, datis BA, DA, A, ducatur à D; ſic enim in rectang. DAB habentur duo data A & DA, & in altero unum inveniri poteſt per unam operationem.

In his rectang. obſerventur partes circulares ut ante (etiam hypotenuſa hypotenuſæ reſpondeat, baſis baſi) è quibus ſemper ponatur perpend. pro una extremarum in utroque rectangulo, quamvis calculum nunquam ingrediatur.

Si in Y, datis AE, AD, A, quæratur DE: *per 6 th.* inveniatur AB: Dem. *per præc.* pro ED, (quoniam hic DA & DE ſunt partes med. BA & BE alteræ extremæ oppoſitæ) eſt *coſ.* BA : *coſ.* BE : : *sin.* comp. DA : *sin.* comp. DE.

Item ſi datis DA, DE, DAE, in triang. Z, quæratur ang. ADE; prius ex datis DA, DAB in rectang. ABD inveniatur ang. BDA. dein pro ang. EDB (conſequenter pro BDA) quoniam in his re-

rectang.

rectang. ang. B D A & B D E ſunt mediæ, atque D A & D E alteræ extr. adjac. Dicito, eſt *tang.* comp. D A: *tang.* comp. D E : : *ſin.* comp. B D A : *ſin.* comp. B D E. Ex his reliqui caſus intelliguntur.

THEOR. 9.

Fig. 21. *In triangulo ſphærico A D E, Si ſemidifferentia crurum addatur ſemibaſi, eidemque detrahatur; Tunc erit, Ut rectangulum ſub ſinibus crurum, ad rectangulum ſub ſinibus ſummæ & reſidui; Ita quadratum radij, ad quadratum ſinus ſemianguli comprehenſi* $\frac{1}{2}$ *D.*

Hujus theorematis figura eſt projectio analemmatica.

Eſt B D = E D, & propter ang. A H D = G H N, eſt arc. G N = A D, horumque crurum ſinus B C & G O.

Rurſus, differentia crurum A D, E D ſeu D B, eſt A B. Baſis angulo comprehenſo oppoſita eſt A E ſeu A S, Sit S K = A B, ſic erit arc. A K ſumma baſis & differentiæ crurum, A R ſemiſumma ſeu ſumma ſemibaſeos & ſemidifferentiæ crurum, quam hic voco Summam, & A V eſt ſinus ejus.

Inſuper ut dictum, A E ſeu A S eſt baſis, & A B differentia crurum, & ſic arc. B S eſt differentia baſis & differentiæ crurum, & arc. B R ſemidifferentia, ſeu differentia ſemibaſeos & ſemidifferentiæ crurum, quam hic voco Reſiduum, ejuſque ſinus eſt recta B R.

Supponatur ſemicirculus G P M perpendiculariter erigi ſuper planum circuli A K P M D, tunc arc. G X erit menſura anguli comprehenſi D, & Q X ſinus ejus rectus, G Q verſus.

Dem. Q H & E C ſunt ſimiles ſinus recti, & G Q, B E, ſimiles ſinus verſi pro radijs G H, B C. Item G O H & B L E ſunt triang. ſimilia, Ideo eſt G H : B C : : (Q H : E C) G Q : B E ; Et G H : G O : : B E : B L. ſed *per cor.* 21. 1. proportionalium producta ſunt proportionalia, ſeu rationes compoſitæ ex æqualibus rationibus ſunt æquales, ſcil. G H q . B C × G O : : G Q × B E :

×BE : BE×BL. Et dividendo GQ×BE & BE×BL per BE, erit GHq : BC×GO :: GQ : BL. & *Invert.* BC×GO : GHq :: BL : GQ.

Rurſus ob AK = BS, ſimilia ſunt triang. rectang. SBL & HAV; Item YGH & QGX ob ang. YGH utrique communem; Ideoque AV : AH :: BL : BS, & GY : GH :: GQ : GX, Erg. AV×BS = BL×AH ſeu Rad. & GY × GX = GQ × GH ſeu Rad. productum ab extremis producto à medijs; Erg. *per* 11. *ax.* 1. *El.* AV×BS : GY×GX :: BL × Rad. : GQ × Rad. Et dividendo BL×Rad. & GQ× Rad. per Rad. erit AV × BS : GY×GX :: BL : GQ; ſed ut ante, eſt BL : GQ :: BC×GO : GHq ſeu q. Rad. Erg. *per* 2 *ax.* 1. *El.* eſt BC × GO :: q. Rad. :: AV×BS : GY × GX vel :: AV× $\frac{1}{2}$ BS : GY× $\frac{1}{2}$ GX, *h. e.* BC×GO : q. Rad. :: AV×BR : GYq. Q. E. D.

PROBL. 1.

Datis tribus lateribus trianguli ſphærici, invenire angulum.

Calculus hìc idem, qui in anguli inventione ex datis lateribus trianguli rectilinei; ſi pro cruribus, ſumma & reſiduo ſumantur eorum ſinus.

THEOR. 2.

Datis omnibus angulis, invenire latus.

Per cor. 5. *Theor.* Convertantur anguli in latera, & latera in angulos; Et tunc ex datis tribus lateribus, in quæ converſi ſunt anguli trianguli propoſiti, inveniatur angulus; atque hìc æqualis erit lateri trianguli propoſiti quæſito.

Si canon logarithmicus ad manum non ſit, ſine quo utrumque hoc ſummè prolixum eſt; ſequente utaris D. Neperi theoremate, cujus demonſtratio brevitatis gratiâ hìc omittitur.

Ut tangens ſemibaſis veræ, ad tangentem ſemiſummæ crurum; Ita tangens ſemidifferentiæ crurum, ad tangentem ſemibaſis alternæ.

F I N I S.

Quomodo propoſitiones *Euclidis* ab authoribus citatæ expedite inveniantur in his Elementis, ſequens indicat Tabula.

Eucl. Lib. 1.	*Elem. hæc*	*Eucl.* 1.	*Elem. hæc*
1 *ax.*	2 *ax.* 1	24	2 *pa.* 10. 3.
2 3. 4. 5	3 *ax.* 1	25	2 *pa.* 11. 3.
6. 7	1 *Cor.* 5. 1	26	12 *th.* 3.
8	1 *ax.* 2	27. 28	9 *th.* 2
9	1 *ax.* 1	29	8 *th.* 2
10. 11	2 *th.* 2	*Cor.* 29.	*Co.* 13. 2
12	5 *ax.* 2	30	10 *th.* 2
13	12 *th.* 2	31	*Pr.* 9. 2
14	1 *th.* 2	32	2 *th.* 3
19	1 *ax.* 1	33	11 *th.* 2
20	2 *pa.* 8. 1	34	7 *th.* 3
Prop. 1	2 *pr.* 1. 3	35. 36. 37. 38.	14 *th.* 3
2	6 *po.* 2	39. 40	15 *th.* 3
3	7 *po.* 2	41	16 *th.* 3
4	1 *pa.* 10. 3	42	*pr.* 16. 5
5	2 *pa.* 4. 3	43	17 *th.* 3
6	1 *pa.* 4.	44. 45	1 *pr.* 17. 3
8	1 *pa.* 11. 3	46	1 *pr.* 9. 3
9	2 *pr.* 4. 2	47. 48	*Cor.* 37. 3
10	3 *pr.* 4. 2	EUCL. 2	*Elem. hæc.*
11	4 *pr.* 2		
12	5 *pr.* 4. 2	1	14 *th.* 2
13. 14	6 *th.* 2	2	16 *th.* 2
15	7 *th.* 2	3	15 *th.* 2
16. 17	2 *th.* 3	4	17 *th.* 2
18. 19	5 *th.* 3	5	20 *th.* 2
20	1 *th.* 3	6	22 *th.* 2
21	6 *th.* 3	7	18 *th.* 2
22	1 *pr.* 1. 3	8	19 *th.* 2
23	1 *pr.* 4. 2	9	21 *th.* 2